

**Θέμα 1.** Μονοενέργειακή δέσμη σωματίδιων ενέργειας  $E$  και μάζας  $m$  προσπίπτει από αριστερά σ' ένα δυναμικό της μορφής

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0, \text{ (περιοχή I),} \\ V_0 & \text{για } 0 \leq x \leq L, \text{ (περιοχή II),} \\ 0 & \text{για } x > L, \text{ (περιοχή III),} \end{cases}$$

↔ — — — — — — — —

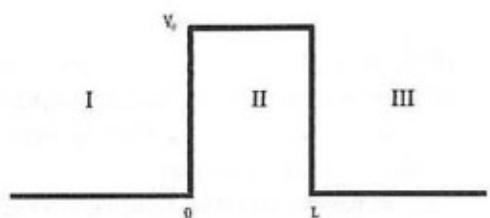
όπου  $V_0 > 0$  και  $E > V_0$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

- (i) Να υπολογίσετε την κυματοσύναρτηση σε όλο το χώρο.
- (ii) Να υπολογίσετε τα ρεύματα πιθανότητας σε όλο το χώρο.
- (iii) Να δείξετε ότι ο συντελεστής διαπερατότητας δίνεται από τη σχέση

$$T = \left\{ 1 + \frac{V_0^2 \sin^2 k_{II} L}{4E(E - V_0)} \right\}^{-1},$$

όπου  $k_{II}$  είναι ο κυματαριθμός στην περιοχή II.

- (iv) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (iii) να βρείτε για ποιες ενέργειες  $E$  η δέσμη συμπεριφέρεται 'κλασικά' δηλαδή περνά στην περιοχή III χωρίς να ανακλαστεί.



**Θέμα 2.** Ενα μη σχετικιστικό σωματίδιο μάζας  $m$  περιφέρεται σε κυκλικές τροχιές ακτίνας  $r$  γύρω από ένα σταθερό κέντρο κάτω από την επίδραση μιας ελεκτικής δύναμης της μορφής  $F = -kr$ , όπου  $k$  θετική σταθερά.

- (i) Να δείξετε ότι η δυναμική ενέργεια  $V(r)$  του σωματιδίου είναι

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2, \quad \text{υπό την προϋπόθεση ότι } V(0) = 0.$$

- (ii) Εφαρμόζοντας τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr να δείξετε ότι οι επιπρεπές τιμές της ακτίνας  $r_n$ , ταχύτητας  $v_n$  και ενέργειας  $E_n$  του σωματιδίου είναι

$$r_n^2 = \frac{n\hbar}{k} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad v_n^2 = \frac{n\hbar}{m} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad E_n = n\hbar \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Θέμα 3.**

Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή σε μια διάσταση, μάζας  $m$  και κυκλικής συχνότητας  $\omega$ . Αν ο ταλαντωτής βρίσκεται στην τυχαία ιδιοκατάσταση  $\psi_n(x)$  της ενέργειας, να υπολογίσετε την μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας  $\langle V \rangle$  με τη βοήθεια της αλγεβρικής μεθόδου, δηλαδή χρησιμοποιώντας τους τελεστές δημιουργείας  $\hat{a}^\dagger$  και καταστροφής  $\hat{a}$ .

**Θέμα 4.** Υπολογίστε τις μέσες τιμές της θέσης  $\langle x \rangle$ , του τετραγώνου της θέσης  $\langle x^2 \rangle$  και την αβεβαιότητα

της  $\Delta x$  ( $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ ) για ένα σωματίδιο που βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση ενός κβαντικού ταλαντωτή σε μια διάσταση, μάζας  $m$  και κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της θέσης (δηλαδή την κυματοσυνάρτηση στο χώρο των θέσεων).

**Θέμα 5.** Σωματίδιο μάζας  $m$  κινείται σ' ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους  $L$ , δηλαδή το δυναμικό δίνεται από τη συνάρτηση

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < x < L, \\ \infty & \text{αλλού} \end{cases}$$

Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση  $\psi(x)$  του σωματιδίου περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\psi(x) = Ax(L-x), \quad A > 0 \quad \text{σταθερά}$$

- (i) Να προσδιορίσετε τη σταθερά  $A$  ώστε η κυματοσυνάρτηση  $\psi(x)$  είναι κανονικοποιημένη.
- (ii) Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής  $E_1$  της θεμελιώδους στάθμης σε μια μέτρηση της ενέργειας. Ποια θα είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου μετά από μια μέτρηση που έδωσε το παραπάνω αποτέλεσμα;
- (iii) Να βρείτε τη μέση τιμή της θέσης  $\langle x \rangle$  του σωματιδίου.
- (iv) Να βρείτε τη μέση τιμή της ενέργειας  $\langle E \rangle$  του σωματιδίου.

**Χρήσιμες σχέσεις:**

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}} \quad \text{για } \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{x} - i\hat{p}), \quad \hat{a}\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x)$$

**Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.**

**Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 θέματα.**

**Καλή επιτυχία.**