

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ N \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & , 0 < x < L \\ 0 & , x > L \end{cases}$$

- α) Υπολογίστε την σταθερά κανονικοποίησης N .
- β) Υπολογίστε την κυματοσυνάρτηση στον χώρο των ορμών.
- γ) Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών.
Τι παρατηρείτε σε σχέση με την κλασική κίνηση;

Ασκηση 2.

Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = Ne^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2 + ip_0 \frac{x}{\hbar}}, \text{ όπου } N = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}$$

- α) Υπολογίστε τα $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$.
- β) Υπολογίστε τα $(\Delta x)^2, (\Delta p)^2, (\Delta x)(\Delta p)$.

Ασκηση 3.

Εάν η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, 0)$ είναι μια Γκαουσιανή συνάρτηση και παριστάνει ένα ελεύθερο σωματίδιο στην μία διάσταση με μάζα m την χρονική στιγμή $t = 0$:

$$\Psi(x, 0) = Ne^{-\lambda \frac{x^2}{2}}, \text{ όπου } N = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

Να βρεθεί η $\Psi(x, t)$.

Ασκηση 4.

Εάν η δυναμική ενέργεια είναι μιγαδική συνάρτηση της θέσης, $V = V_1 + iV_2$, τότε η πιθανότητα δεν διατηρείται.

Βρείτε την εξίσωση που ισχύει μεταξύ πυκνότητας πιθανότητας και ρεύματος πιθανότητας.

Ασκηση 5.

Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές της ενέργειας $E_n \neq E_m$, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

Άσκηση 6.

Εάν l_x, l_y, l_z είναι οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής και ορίσουμε τους τελεστές $l_+ = l_x + il_y$, $l_- = l_x - il_y$
Να δείξετε ότι

- α) $[l_z, l_+] = \hbar l_+$, $[l_z, l_-] = -\hbar l_-$, $[l_+, l_-] = 2\hbar l_z$.
- β) Εάν ισχύει $l_z\Psi = \lambda\Psi$ και $\Phi = l_+\Psi$ τότε $l_z\Phi = (\lambda + \hbar)\Phi$.

Άσκηση 7.

- α) Δείξτε ότι $\mathbf{P} = \left(\frac{im}{\hbar}\right) [H, \mathbf{r}]$.
- β) Η μέση τιμή της ορμής σε μια διακριτή στάσιμη κατάσταση είναι μηδέν.

Άσκηση 8.

Εάν η συνάρτηση F είναι συνάρτηση του x και άλλων μεγεθών A που μετατίθενται με τον τελεστή p_x , τότε ισχύει
 $[p_x, F] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}$

Άσκηση 9.

Εάν η συνάρτηση $\zeta(x)$ ορίζεται ως εξής
 $\zeta(x) = \begin{cases} a & , x > 0 \\ -a & , x < 0 \end{cases}$
Τότε $\frac{d\zeta}{dx} = 2a\delta(x)$.

Άσκηση 10.

Εάν ισχύει $[[A, B], A] = 0$, τότε

- α) $[e^{-sA}, B] = -s[A, B]e^{-sA}$
- β) $e^{-sA}Be^{sA} = -s[A, B] + B$

Άσκηση 11.

Να ορίσετε την παράγωγο ενός τελεστή ως προς μια παράμετρο t .
Κατόπιν με βάση τον ορισμό να δείξετε ότι

- α) $\frac{d(AB)}{dt} = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$
- β) $\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$

Άσκηση 12.

Να γράψετε στον χώρο των ορμών την εξίσωση του Schrödinger για ένα σωματίδιο με μάζα m και δυναμική ενέργεια $V(\mathbf{r})$.

(1)

Kύρωμα χαρική II - ΣΕΜΦΕ

Λίστα Ροών Σημάδων Ακίνων, Συγχρόνως.

Άρκυσης Σ=:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad \text{η χαρική στην}$$

$$H\psi_n = E_n \psi_n \quad \text{και} \quad H\psi_m = E_m \psi_m, \quad E_n \neq E_m$$

και E_n, E_m γραμματικές αριθμοί δεσμοί της H
είναι εργαζόμενοι τελεστές.

$$\Rightarrow \int \phi_n^* H \phi_m dx = E_m \int \phi_n^* \phi_m dx$$

$$\left\{ \int \phi_n^* H \phi_m dx = \int (H \phi_n)^* \phi_m dx = E_n^* \int \phi_n^* \phi_m dx = E_n \int \phi_n^* \phi_m dx \right.$$

$$\Rightarrow (E_m - E_n) \int \phi_n^* \phi_m dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \phi_n^* \phi_m dx = 0$$

(2)

Άρκον 12:

Όα διεγέρεται σαν πλα Συνάριση, ο ανίδιγον "Είκοσι" γρίφοις είναι όσι της Συνάρισης.

Κινούμε ανάτρεξη τας κυριαρχούσας σαν χειρός των οργάνων

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{Px}{\hbar}} \Phi(P,t) dP$$

$$(\text{οχι}: \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(P-P')\frac{x}{\hbar}} = \delta(P-P')$$

$$\text{αρών} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t) \Psi(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(P,t) \Phi(P,t) dP$$

Συγκατανομή στην ορθοπροβολή της Φ είναι Καροκικορομήσιμη εάν η
σταθμή της Φ είναι Καροκικορομήσιμη
 $\Phi(P \rightarrow \pm\infty, t) \rightarrow 0$.

Ανάμενε ριθμίζεται από την ιδιορρυθμία στην έργη $V(x)$ στην
επαναπαραγωγή του x .

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \left[\frac{P^2}{2m} + V(x) \right] \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x) \Psi$$

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dP e^{i\frac{Px}{\hbar}} (i\hbar) \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2}{dx^2} e^{i\frac{Px}{\hbar}} \right] \Phi dP$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dP V(x) e^{i\frac{Px}{\hbar}} \Phi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dP e^{i\frac{Px}{\hbar}} \left\{ i\hbar \frac{d\Phi}{dt} - \frac{P^2}{2m} \Phi \right\} dP = \int_{-\infty}^{\infty} dP \left[V(-i\hbar \frac{d}{dP}) e^{i\frac{Px}{\hbar}} \right] \Phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dP e^{i\frac{Px}{\hbar}} \left[V(i\hbar \frac{d}{dP}) \Phi \right]$$

(3)

Mengeschrifte anordnungen bei:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \left[V(-it \frac{d}{dp}) e^{ipx} \right] \Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \left[V(it \frac{d}{dp}) \Phi(p) \right]$$

D. X. J. u. $V(x) = x$

$$\begin{aligned} -it \int_{-\infty}^{\infty} dp \left(\frac{d}{dp} e^{ipx} \right) \Phi(p) &= (-it) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dp} \left(e^{ipx} \Phi(p) \right) dp - (it) \int e^{ipx} \frac{d\Phi}{dp} dp \\ &= (-it) e^{ipx} \Phi(p) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int dp e^{ipx} \left(it \frac{d\Phi}{dp} \right) \\ &= 0 + \int dp e^{ipx} \left(it \frac{d\Phi}{dp} \right) \end{aligned}$$

Die Gleichung ist die oben angegebene zur operativen
Form $x = it \frac{d}{dp}$.

$$\Rightarrow it \frac{d\Phi}{dt} = \frac{p^2}{2m} \Phi + V(it \frac{d}{dp}) \Phi$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{ipx} = i^2 \frac{p^2}{\hbar^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}$$

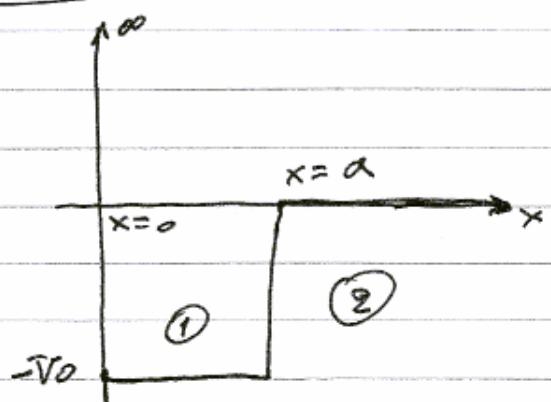
$$V(x) e^{ipx} = V(-it \frac{d}{dp}) e^{ipx}$$

(4)

Kλαρομηχανική ΙΙ, ΣΕΜΡΕ

Άλογος Δείγματος Σημάδος Τονίσεων, Εγκύρωψη.

Άρκοντος 10^η:



$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < 0 \\ -V_0 & \text{for } 0 < x < a, V_0 > 0 \\ 0 & \text{for } x > a \end{cases}$$

$$-V_0 < E < 0, \quad E = -|E|$$

$$-\frac{\tau^2}{2m} \psi'' + V(x) \psi = E \psi$$

ηροκώνιο 1: $-\frac{\tau^2}{2m} \psi_1'' - V_0 \psi_1 = E \psi_1$ και $\psi_1(0) = 0$

$$\Rightarrow \psi_1'' = -\frac{2m}{\tau^2} (V_0 - |E|) \psi_1 = k_1^2 \psi_1$$

οπου $k_1^2 = \frac{2m}{\tau^2} (V_0 - |E|)$ μέση στα εξισώματα

μονοία ικανότητα αντίμετρη των συνθήκης $\psi_1(x=0) = 0$

είναι $\psi_1(x) = A \sin k_1 x$

ηροκώνιο 2: $-\frac{\tau^2}{2m} \psi_2'' = E \psi_2 \Rightarrow \psi_2'' = -\frac{2mE}{\tau^2} \psi_2$

$$\Rightarrow \psi_2'' = \frac{2m|E|}{\tau^2} \psi_2 = k_2^2 \psi_2 \quad \text{και } \psi_2(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \psi_2(x) = B e^{-k_2 x} \quad \text{οπου } k_2^2 = \frac{2m|E|}{\tau^2}$$

Συρόμενος Ευδίκτες:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a) \Rightarrow A \sin k_1 a = B e^{-k_2 a}$$

$$\psi_1'(a) = \psi_2'(a) \Rightarrow k_1 A \cos k_1 a = -k_2 B e^{-k_2 a}$$

5

Scarpírros kai pýri ékayre:

$$\tan K_1 a = - \frac{K_1}{K_2}$$

apo tis pýri ariw tis
éjlowoas opikayre zo E.

Dapikin pýri: opikayre $Z = K_1 a$ kan $Z_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{t_1^2}} a$

$$\Rightarrow \tan K_1 a = \tan Z$$

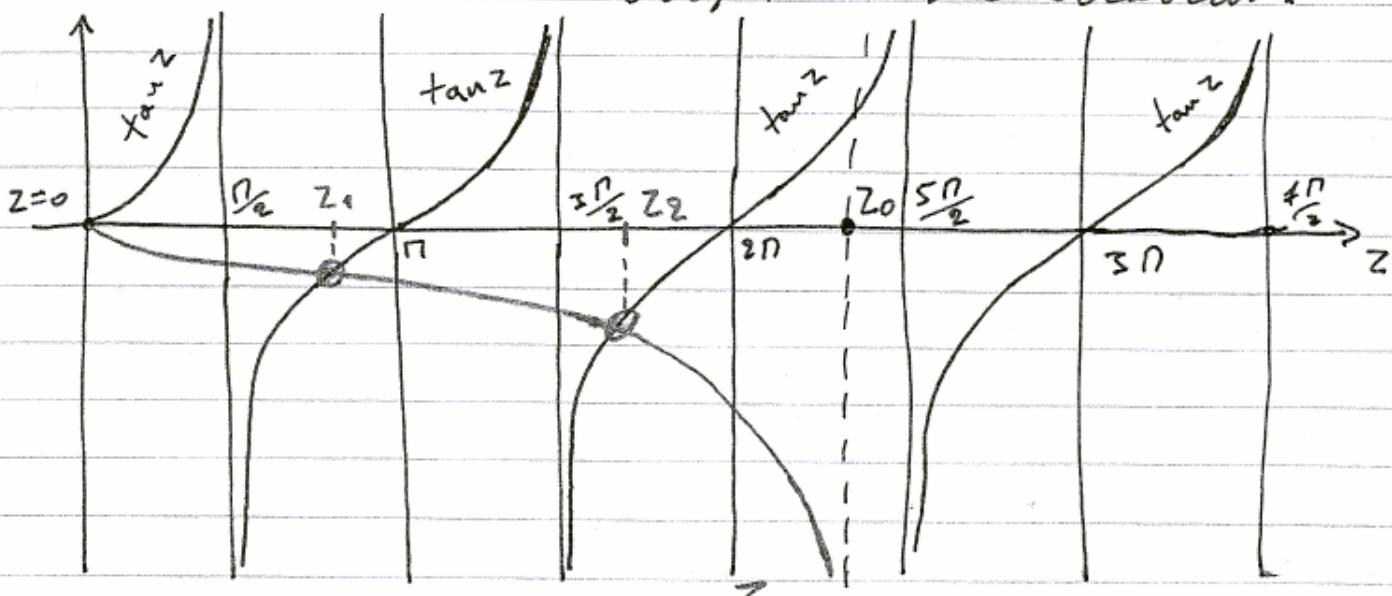
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1 a}{K_2 a} = \sqrt{\frac{K_1^2 a^2}{K_2^2 a^2}} = \sqrt{\frac{Z^2}{Z_0^2 - Z^2}}$$

$$\text{Slobz. } K_2 a^2 = \frac{2m|E|}{t_1^2} a^2 = \frac{2m|E|^2}{t_1^2} a^2 \pm \frac{2mV_0}{t_1^2} a^2 = \\ = \left(\frac{2m|E|}{t_1^2} a^2 - \frac{2mV_0}{t_1^2} a^2 \right) + \frac{2mV_0}{t_1^2} a^2 = -K_1 a^2 + \frac{2mV_0}{t_1^2} a^2$$

$$\Rightarrow \tan Z = - \frac{Z}{\sqrt{Z_0^2 - Z^2}}$$

kan kávareas dapikin
rapdorion tis slobz.,
ta onpida tis tis slobz.
tis erigases tis

Slobz. káza ocaócar.



$$\text{for } \frac{3\pi}{2} < Z_0 \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \text{slobz. } Z_1, Z_2 \Rightarrow E_1, E_2$$

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

ι

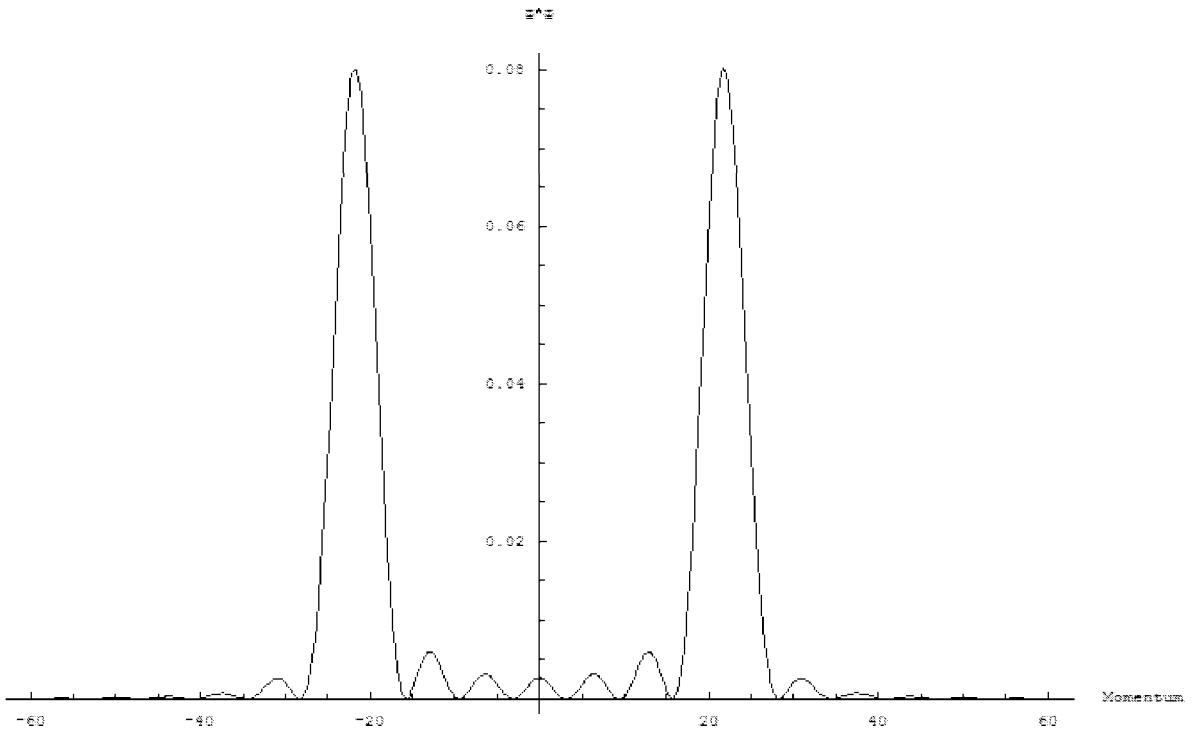
$$\begin{aligned} N^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 1 \\ \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \\ \Rightarrow N^2 \frac{L}{2} &= 1 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ii

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(e^{-i\frac{n\pi x}{L}} - e^{i\frac{n\pi x}{L}} \right) \\ \Phi(p) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_0^L e^{-i\frac{px}{\hbar}} e^{i\frac{n\pi x}{L}} dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_0^L e^{-i\frac{px}{\hbar}} e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx = \\ &= \frac{-i}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \int_0^L e^{i\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)x} dx + \frac{i}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \int_0^L e^{-i\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)x} dx = \\ &= \frac{-i}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)L} - 1}{i\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)} + \frac{i}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \frac{e^{-i\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)L} - 1}{-i\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \frac{(-1)^n e^{-i\frac{pL}{\hbar}} - 1}{\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)} - \frac{1}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \frac{(-1)^n e^{-i\frac{pL}{\hbar}} - 1}{\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4\pi\hbar L}} \left((-1)^n e^{-i\frac{pL}{\hbar}} - 1 \right) \frac{2\frac{n\pi}{L}}{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\right)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

iii

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \Phi^*(p)\Phi(p) = \frac{4\frac{n^2\pi^2}{L^2}}{4\pi\hbar L} \frac{\left((-1)^n e^{i\frac{pL}{\hbar}} - 1\right) \left((-1)^n e^{-i\frac{pL}{\hbar}} - 1\right)}{\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\right)^2} = \\ &= \frac{4n^2\pi}{\hbar L^3} \frac{\sin^2\left(\frac{pL}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)^2} \text{ για } n \text{ άρτιος, και} \\ &= \frac{4n^2\pi}{\hbar L^3} \frac{\cos^2\left(\frac{pL}{2\hbar}\right)}{\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{p}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{p}{\hbar}\right)^2} \text{ για } n \text{ περιττός.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της πυκνότητας πιθανότητας συναρτήσει της ορμής για $\hbar = 1$, $L = 1$ και $n = 10$

Άσκηση 2.

$$a) \Psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2} e^{\frac{iP_0 x}{\hbar}} = \Phi(x) e^{\frac{iP_0 x}{\hbar}} \quad \text{όπου βάζουμε } \Phi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \Psi^*(x) \Psi(x) dx = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-a(x-x_0)^2} dx = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y + x_0) e^{-ay^2} dy = \\ &= 0 + x_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy = x_0 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = x_0 \\ \bullet \quad & \langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a(x-x_0)^2} dx = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y + x_0)^2 e^{-ay^2} dy = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-ay^2} dy + 2x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-ay^2} dy + x_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy \right] = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 + x_0^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right] = x_0^2 + \frac{1}{2a} \\ \bullet \quad & \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}} (-i\hbar) \frac{d\Psi}{dx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) e^{-i\frac{p_0 x}{\hbar}} (-i\hbar) \left[\frac{d\Phi}{dx} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} + \left(\frac{ip_0}{\hbar} \right) \Phi e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}} \right] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \frac{d\Phi}{dx} dx + p_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 dx = \\
&= \frac{-i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi^2}{dx} dx + p_0 = \frac{-i\hbar}{2} \Phi^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + p_0 = 0 + p_0 = p_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad &\langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \Psi''(x) dx = \\
&= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} (\Psi^* \Psi') dx + \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'^* \Psi' dx = \\
&= -\hbar^2 \Psi^*(x) \Psi'(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'^* \Psi' dx = \\
&= 0 + \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'^* \Psi' dx \\
&\Rightarrow \\
\langle p^2 \rangle &= h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi'(x) e^{-i \frac{p_0 x}{\hbar}} - \frac{i p_0}{\hbar} \Phi(x) e^{-i \frac{p_0 x}{\hbar}} \right] \left[\Phi'(x) e^{i \frac{p_0 x}{\hbar}} + \frac{i p_0}{\hbar} \Phi(x) e^{i \frac{p_0 x}{\hbar}} \right] dx = \\
&= h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi')^2 dx - i p_0 h \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi \Phi' dx + i p_0 h \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi' \Phi dx + p_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2 dx = \\
&= p_0^2 + h^2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 (x - x_0)^2 e^{-a(x-x_0)^2} dx = \\
&= p_0^2 + h^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \\
&= p_0^2 + \hbar^2 \frac{a}{2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$\beta)$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad &(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = x_0^2 + \frac{1}{2a} - x_0^2 = \frac{1}{2a} \\
\bullet \quad &(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = p_0^2 + h^2 \frac{a}{2} - p_0^2 = h^2 \frac{a}{2} \\
\bullet \quad &(\Delta x)(\Delta p) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sqrt{\frac{a}{2}} h = \frac{\hbar}{2} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.

Ορίζουμε πρώτα την κυματοσυνάρτηση στον χώρο των ορμών

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_p^*(x) \Psi(x, 0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\frac{x^2}{2}} e^{-i\frac{px}{\hbar}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-\frac{p^2}{2\lambda\hbar^2}} = \left(\frac{1}{\lambda\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{p^2}{2\lambda\hbar^2}}\end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

με $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ και $\beta = \text{οτιδήποτε}$.

Ορίζουμε την $\Psi(x, t)$

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(p) \Psi_p(x) e^{-i\frac{E_p t}{\hbar}} dp = \\ &= \left(\frac{1}{\lambda\pi\hbar^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2\lambda\hbar^2}} e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\lambda\pi\hbar^2)^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\lambda\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)p^2 + \frac{ix}{\hbar}p} dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\lambda\pi\hbar^2)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2\lambda\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)}} e^{\frac{(ix)^2}{4\left(\frac{1}{2\lambda\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)}} = \\ &= N(t) e^{-\frac{\lambda(t)}{2}x^2}\end{aligned}$$

όπου

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{1}{(\lambda\pi\hbar^2)^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2\lambda\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}\right)}}$$

και

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{1}{2h^2} \frac{1}{\frac{1}{2\lambda\hbar^2} + \frac{it}{2m\hbar}} = \frac{1}{2h^2} \frac{4\lambda m h^3}{2mh + i2\lambda t h^2} \\ &= \frac{\lambda m}{m + i\lambda t \hbar} = \frac{\lambda m(m - i\lambda t \hbar)}{m^2 + \lambda^2 t^2 \hbar^2} = \lambda_1(t) - i\lambda_2(t)\end{aligned}$$

$\mu\varepsilon$

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{\lambda m^2}{m^2 + \lambda^2 t^2 \hbar^2} \\ \lambda_2(t) &= \frac{\lambda^2 t \hbar m}{m^2 + \lambda^2 t^2 \hbar^2}\end{aligned}$$

'Αρωτικό

$$\Psi(x, t) = N(t) e^{i \frac{\lambda_2(t)}{2} x^2} e^{-\frac{\lambda_1(t)x^2}{2}}$$

όπου $\lambda_1(t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$.

Επίσης

$$\begin{aligned}P(x, t) &= |\Psi(x, t)|^2 = |N(t)|^2 e^{-\lambda_1 x^2} \\ |N(t)|^2 &= \sqrt{\frac{\lambda_1(t)}{\pi}}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(\Delta x)_t &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \\ (\Delta x)_{t=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\end{aligned}$$

'Αρωτικό κυματοπακέτο απλώνει με τον χρόνο και η πιθανότητα $P(x, t) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$ ενώ έχουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t) dx = 1 \quad \forall t$. ■

'Ασκηση 4.

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V_1 \Psi + iV_2 \Psi &= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^* + V_1 \Psi^* - iV_2 \Psi^* &= -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\end{aligned}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας είναι ίση με $P = \Psi^* \Psi$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Psi^* \Psi)}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \\ &= \frac{\hbar}{2im} \Psi \nabla^2 \Psi^* - \frac{1}{ih} V_1 \Psi^* \Psi + \frac{iV_2}{ih} \Psi^* \Psi - \frac{\hbar}{2im} \Psi^* \nabla^2 \Psi + \frac{1}{ih} V_1 \Psi^* \Psi + \frac{iV_2}{ih} \Psi^* \Psi = \\ &= -\frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) + \frac{2}{\hbar} V_2 \Psi^* \Psi = \\ &= -\frac{\hbar}{2im} \nabla \cdot (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{2}{\hbar} V_2 \Psi^* \Psi\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\bigtriangledown(\Psi^* \bigtriangledown \Psi) = \bigtriangledown \Psi^* \bigtriangledown \Psi + \Psi^* \bigtriangledown^2 \Psi$. Θεωρώντας το ρεύμα πιθανότητας $\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$ παίρνουμε

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{2}{\hbar} V_2 P \quad \blacksquare$$

Ασκηση 6.

α) Ισχύει $[l_x, l_y] = i\hbar l_z$, $[l_z, l_x] = i\hbar l_y$, και $[l_y, l_z] = i\hbar l_x$, αφού

$$\begin{aligned} [l_z, l_+] &= [l_z, l_x + il_y] = [l_z, l_x] + i[l_z, l_y] = \\ &= i\hbar l_y + i(-i\hbar)l_x = \hbar(l_x + il_y) = \hbar l_+ \end{aligned}$$

όμοια για το $[l_z, l_-]$. \blacksquare

β)

$$\begin{aligned} l_z \Phi &= l_z l_+ \Psi = l_+ l_z \Psi + h l_+ \Psi = \\ &= l_+(\lambda \Psi) + h l_+ \Psi = (\lambda + h) l_+ \Psi = (\lambda + h) \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{διότι } l_z l_+ - l_+ l_z &= h l_+ \\ \text{αφού } l_z l_+ &= l_+ l_z + h l_+ \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ασκηση 7.

α)

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \vec{r}] &= \hat{x}[H, x] + \hat{y}[H, y] + \hat{z}[H, z] \quad kai \quad P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \\ [H, x] &= \left[\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}), x \right] = \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \\ &= \left[\frac{p_x^2}{2m}, x \right] = \frac{2}{2m}(-ih)p_x = -\frac{ih}{m}p_x \\ \Rightarrow [\hat{H}, \vec{r}] &= \frac{-ih}{m}(p_x \hat{x} + p_y \hat{y} + p_z \hat{z}) = -\frac{ih}{m}\vec{p} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \langle \Psi_n, \mathbf{P} \Psi_n \rangle &= \frac{im}{\hbar} \langle \Psi_n [H, \mathbf{r}] \Psi_n \rangle = \\ &= \frac{im}{\hbar} [\langle \Psi_n, H \mathbf{r} \Psi_n \rangle - \langle \Psi_n, \mathbf{r} H \Psi_n \rangle] = \\ &= \frac{im}{\hbar} [E_n \langle \Psi_n, \mathbf{r} \Psi \rangle - E_n \langle \Psi_n, \mathbf{r} \Psi_n \rangle] = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση:

$$\begin{aligned}\langle \Psi_n, H\mathbf{r}\Psi_n \rangle &= \int \Psi_n^* H(\mathbf{r}\Psi_n) d^3x = \\ &= \int (H\Psi_n)^*(\mathbf{r}\Psi_n) d^3x = E_n \int \Psi_n^*(\mathbf{r}\Psi_n) d^3x \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Άσκηση 8.

Καταρχήν $F = F(A, x)$ και $[p_x, A] = 0$

Εάν θέλουμε να ορίσουμε την συνάρτηση $g(\hat{B})$ ενός τελεστή \hat{B} θεωρούμε την ανάλυση της $g(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x = 0$:

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(x=0) x^n \\ \Rightarrow g(\hat{B}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) \hat{B}^n\end{aligned}$$

Εάν έχουμε την φυσική ποσότητα $C = xp$ τότε ο τελεστής \hat{C} είναι ερμιτιανός εάν τον ορίσουμε συμμετρικά ως προς τα \hat{x}, \hat{p}

$$\hat{C} = \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον ερμιτιανό τελεστή $F(A, x)$ ως εξής:

$$F(\hat{A}, \hat{x}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[F^{(n)}(A, 0) x^n + x^n F^{(n)}(A, 0) \right] \right]$$

όπου

$$F^{(n)}(A, 0) = \left. \frac{d^n F(A, x)}{dx^n} \right|_{x=0}$$

Επομένως (παίρνουμε για απλότητα μόνο τον πρώτο όρο)

$$\begin{aligned}
 [p_x, F] &= \left[p_x, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(A, 0) x^n \right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left([p_x, F^{(n)}(A, 0)] x^n + F^{(n)}(A, 0) [p_x, x^n] \right) = \\
 &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(A, 0) (-i\hbar) \frac{\partial x^n}{\partial x} = \\
 &= (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(A, 0) x^n \right] = (-i\hbar) \frac{\partial F}{\partial x}
 \end{aligned}$$

ομοίως και για τον δεύτερο όρο της F .

Αποδείξτε επαγγειακά την σχέση $[P, x^n] = -i\hbar n x^{n-1}$

Άσκηση 9.

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\frac{d\zeta}{dx}$ έχει τις ιδιότητες της δ συνάρτησης.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{dx} dx = \zeta(x) |_{-\infty}^{\infty} = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{dx} dx = 1$.

(ii) Δοκιμάζουμε το ολοκλήρωμα με μια τυχούσα συνάρτηση $f(x)$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d\zeta}{dx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}(f\zeta) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta(x) \frac{df}{dx} dx = \\
 &= [f(+\infty)\zeta(+\infty) - f(-\infty)\zeta(-\infty)] - \int_{-\infty}^0 (-a) \frac{df}{dx} dx - \int_0^{+\infty} a \frac{df}{dx} dx = \\
 &= [af(+\infty) - (-a)f(-\infty)] + a[f(0) - f(-\infty)] - a[f(+\infty) - f(0)] = \\
 &= af(+\infty) - af(+\infty) + af(-\infty) - af(-\infty) + 2af(0) = \\
 &= 2af(0) = 2a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ασκηση 10.

α)

$$\begin{aligned}
 e^{-sA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-sA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} A^n \\
 [e^{-sA}, B] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} [A^n, B] \\
 [A^n, B] &= n [A, B] A^{n-1} \\
 \Rightarrow [e^{-sA}, B] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s^n}{n!} [A, B] n A^{n-1} = \\
 &= (-s) [A, B] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} s^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = (-s) [A, B] e^{-sA} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
 e^{-sA} B e^{sA} &= e^{-sA} B e^{sA} + B e^{-sA} e^{sA} - B e^{-sA} e^{sA} = \\
 &= [e^{-sA}, B] e^{sA} + B e^{-sA} e^{sA} = \\
 &= -s [A, B] e^{-sA} e^{sA} + B e^{-sA} e^{sA} = -s [A, B] + B
 \end{aligned}$$

Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 e^{-sA} e^{sA} &= \left[1 - sA + \frac{(sA)^2}{2!} - \frac{(sA)^3}{3!} + \dots \right] \left[1 + sA + \frac{(sA)^2}{2!} + \frac{(sA)^3}{3!} + \dots \right] = \\
 &= 1 + (sA - sA) + \left[\frac{(sA)^2}{2} - (sA)^2 + \frac{(sA)^2}{2} \right] + s^3 [\dots] + \dots = \\
 &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Ασκηση 11.

Εάν $A = A(\omega)$ ορίζονται:

$$\frac{dA}{d\omega} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega + \Delta\omega) - A(\omega)}{\Delta\omega}$$

$\alpha)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d(AB)}{d\omega} &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega + \Delta\omega)B(\omega + \Delta\omega) - A(\omega)B(\omega)}{\Delta\omega} = \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\omega} [A(\omega + \Delta\omega)B(\omega + \Delta\omega) + A(\omega)B(\omega + \Delta\omega) - A(\omega)B(\omega + \Delta\omega) - A(\omega)B(\omega)] = \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\omega} [A(\omega + \Delta\omega) - A(\omega)] B(\omega + \Delta\omega) + \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega)}{\Delta\omega} [B(\omega + \Delta\omega) - B(\omega)] = \\
 &= \frac{dA}{d\omega} B + A \frac{dB}{d\omega} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

$\beta)$

$$\begin{aligned}
 A^{-1}A &= 1, \quad AA^{-1} = 1 \Rightarrow \frac{d}{d\omega}(AA^{-1}) = 0 \\
 \Rightarrow \frac{dA}{d\omega}A^{-1} + A\frac{dA^{-1}}{d\omega} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{dA}{d\omega}A^{-1} &= -A\frac{dA^{-1}}{d\omega} \Rightarrow \frac{dA^{-1}}{d\omega} = -A^{-1}\frac{dA}{d\omega}A^{-1}
 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε δεξιά και αριστερά με τον τελεστή A και βρίσκουμε:

$$\frac{dA}{d\omega} = -A\frac{dA^{-1}}{d\omega}A \quad \blacksquare$$

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Εάν οι τελεστές A, B είναι ερμιτιανοί να δείξετε ότι

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \left(\frac{1}{4}\right) [\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2]$$

όπου $D = -i(AB - BA)$ και $G = AB + BA$.

Με βάση την προηγούμενη σχέση να αποδειχθεί η γενικευμένη Σχέση Αβεβαιότητας για τα μεγέθη A, B .

Ασκηση 2.

Εξετάστε πότε το γινόμενο αβεβαιότητας δυο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του. Δηλαδή πότε ισχύει το ίσον στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

Εφαρμογή για $A = x, B = p = -i\hbar \frac{d}{dx}$, υποθέτοντας $\langle x \rangle = 0, \langle p \rangle = 0$.

Ασκηση 3.

Εάν Σ είναι ένας ερμιτιανός πίνακας με την ιδιότητα $\Sigma^2 = \mathbb{I}$, όπου \mathbb{I} είναι ο ταυτοικός πίνακας, να δείξετε ότι

$$\exp(i a \Sigma) = \mathbb{I} \cos(a) + i \Sigma \sin(a)$$

Εφαρμογή στους πίνακες του Pauli, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ασκηση 4.

Οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα είναι μη εκφυλισμένες.

Ασκηση 5.

Η δυναμική ενέργεια σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για ένα σωματίδιο μάζας m , είναι ανάλογη της συνάρτησης δέλτα του Dirac ,

$$V(x) = -a\delta(x) \text{ με } a > 0.$$

Να βρεθούν

α) Οι στάσιμες καταστάσεις.

β) Ο συντελεστής ανάκλασης για ένα προσπίπτον σωματίδιο με ενέργεια $E > 0$.

Ασκηση 6.

Τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας των μετάλλων βρίσκονται δεσμευμένα μέσα στο μέταλλο από ένα φράγμα δυναμικού. Για την μονοδιάστατη προσέγγιση το δυναμικό αυτό περιγράφεται από την συνάρτηση $V(x)$, όπου $V(x) = 0$ για $x < 0$ και $V(x) = V_0$ για $x > 0$. Η μέγιστη ενέργεια που συναντάμε για τα ηλεκτρόνια είναι η ενέργεια E_f του Fermi . Εφαρμόζουμε στο μέταλλο ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο κατά τον άξονα των x .

Βρείτε τον Συντελεστή Διέλευσης T για ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια E_f .

Άσκηση 7.

Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης Δx και την αβεβαιότητα ορμής Δp για μια τυχούσα ιδιο-
συνάρτηση $\Psi_n(x) = N \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ του απειρόβαθρου πηγαδιού.

Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε ένα διδιάστατο ορθογώνιο κουτί
με μήκη πλευρών a, b . Να βρεθούν οι επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειάς του.

Άσκηση 9.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου σε ένα απειρόβαθρο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται, κατά την
χρονική στιγμή $t = 0$, από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi = N(\Psi_1 + \Psi_2)$$

Όπου Ψ_1 και Ψ_2 οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις των δυο πρώτων ενεργειακών σταθμών
του πηγαδιού. Υπολογίστε την μέση θέση του σωματιδίου ύστερα από χρόνο t .

Άσκηση 10.

Να βρείτε τις ενέργειες των δέσμων καταστάσεων για σωματίδιο στο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ -V_0 & , 0 < x < a, V_0 > 0 \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

Άσκηση 11.

Να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας για σωματίδιο στο ασύμμετρο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_3 & , x < 0 \\ V_2 = 0 & , 0 < x < a , \text{ óπου } V_3 > V_1 \text{ και } V_1, V_3 > 0. \\ V_1 & , x > a \end{cases}$$

Άσκηση 12.

Υπολογίστε τις δυνατές τιμές ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε δυναμικό της μορφής

$$W(x) = \begin{cases} +\infty & , x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

Ποιές είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος;

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1.

$$\langle A^2 \rangle = \int \Psi^* A^2 \Psi dx = \int (A\Psi)^*(A\Psi) dx$$

$$\langle B^2 \rangle = \int \Psi^* B^2 \Psi dx = \int (B\Psi)^*(B\Psi) dx$$

Ανισότητα του Schwartz :

$$\left(\int \Phi_1^* \Phi_1 dx \right) \left(\int \Phi_2^* \Phi_2 dx \right) \geq \left| \int \Phi_1^* \Phi_2 dx \right|^2$$

$$\Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle = \left(\int (A\Psi)^*(A\Psi) dx \right) \left(\int (B\Psi)^*(B\Psi) dx \right) \geq$$

$$\geq \left| \int (A\Psi)^*(B\Psi) dx \right|^2 =$$

$$= \left| \int \Psi^* AB \Psi dx \right|^2 = |\langle AB \rangle|^2 =$$

$$= (\text{Re}\langle AB \rangle)^2 + (\text{Im}\langle AB \rangle)^2$$

Ο τελεστής $C = AB$ δεν είναι ερμιτιανός ($C^\dagger = (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$), όπως η μέση τιμή του $\langle C \rangle = \langle AB \rangle$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός.

Ορίζουμε τον C σαν το μιγαδικό άθροισμα δύο ερμιτιανών τελεστών.

Έχουμε

$$C = \frac{1}{2}(AB + BA) + i\frac{1}{2i}(AB - BA) =$$

$$= \frac{1}{2}(G + iD)$$

$$G = AB + BA, \quad D = \frac{1}{i}(AB - BA), G^\dagger = G, \quad D^\dagger = D$$

$$\Rightarrow \langle C \rangle = \frac{1}{2}(\langle G \rangle + i\langle D \rangle)$$

$$\langle G \rangle, \langle D \rangle \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |\langle AB \rangle|^2 = |\langle C \rangle|^2 = \frac{1}{4}(\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2)$$

Άρα

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4}(\langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2) \quad \blacksquare$$

Θα αποδείξουμε τώρα την γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας: $(\Delta A)(\Delta B) = \frac{1}{2} |[A, B]|$

Επειδή $\langle D \rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle D \rangle^2 \in \mathbb{R}^+$ και ομοίως $\langle G \rangle^2 \in \mathbb{R}^+$
επομένως

$$\Rightarrow \langle G \rangle^2 + \langle D \rangle^2 \geq \langle D \rangle^2 \Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle D \rangle^2$$

Άρα

$$|\langle AB \rangle|^2 \geq \frac{1}{4} \langle D \rangle^2$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} i\langle D \rangle &= \langle (AB - BA) \rangle = \langle [A, B] \rangle \\ i^2 \langle D \rangle^2 &= \langle [A, B] \rangle^2 \\ \Rightarrow \langle D \rangle^2 &= -\langle [A, B] \rangle^2 \end{aligned}$$

δηλαδή ο $\langle [A, B] \rangle^2$ είναι αρνητικός αριθμός.
Άρα

$$\langle D \rangle^2 = |\langle [A, B] \rangle|^2 \Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2$$

επειδή $\langle [A, B] \rangle = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
τότε $\langle [A, B] \rangle^2 = -\alpha^2$
και $|\langle [A, B] \rangle|^2 = \alpha^2 = |\langle [A, B] \rangle|^2$

$$\Rightarrow \langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 \quad \blacksquare$$

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \\ (\Delta B)^2 &= \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle \\ \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} |\langle [A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] \rangle|^2 \end{aligned}$$

από την προηγούμενη σχέση, αλλά:

$$[A - \langle A \rangle, B - \langle B \rangle] = (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) - (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) = AB - BA = [A, B]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 &\geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 \\ \Rightarrow (\Delta A) (\Delta B) &\geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

Για να έχουμε την ισότητα στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας όταν πρέπει να ισχύουν δύο ισότητες.

Πρώτον από την ανισότητα του Schwartz, για να γίνει ισότητα, τα δύο διανύσματα Φ_1 και Φ_2 όταν πρέπει να είναι παράλληλα μεταξύ τους

$$\Rightarrow (A - \langle A \rangle) \Psi = c(B - \langle B \rangle) \Psi$$

Δεύτερον όταν πρέπει $\eta \langle G \rangle = 0$

δηλαδή $\langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) + (B - \langle B \rangle)(A - \langle A \rangle) \rangle = 0$
εάν θέσουμε $A' = A - \langle A \rangle$ και $B' = B - \langle B \rangle$, τότε

$$\begin{aligned} \langle A'B' \rangle + \langle B'A' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow c^* \langle B'B' \rangle + c \langle B'B' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow (c + c^*) \langle B'B' \rangle &= 0 \Rightarrow c + c^* = 0 \\ \Rightarrow c &= i\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (A - \langle A \rangle) \Psi &= i\alpha(B - \langle B \rangle) \Psi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Εφαρμογή:

Έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} x\Psi &= (i)(-i)\alpha\hbar \frac{d\Psi}{dx} \\ \frac{d\Psi}{dx} &= \frac{x}{\alpha\hbar}\Psi \Rightarrow \Psi(x) = Ne^{\frac{x^2}{2\alpha\hbar}} \end{aligned}$$

Για να είναι κανονικοποιημένη η κυματοσυνάρτηση θέλουμε $\alpha < 0$.

Θέτουμε $\lambda = -\frac{1}{\alpha\hbar} > 0$

$$\Rightarrow \Psi(x) = Ne^{-\lambda \frac{x^2}{2}} \quad \blacksquare$$

Ασκηση 3.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots \\
\cos(\theta) &= 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\
\sin(\theta) &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\
e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \\
\Sigma^2 &= \mathbb{I}, \quad \Sigma^3 = \Sigma\Sigma^2 = \Sigma, \quad \Sigma^4 = \mathbb{I}, \quad \Sigma^5 = \Sigma, \quad \dots \\
\Rightarrow e^{i\alpha\Sigma} &= \mathbb{I} + (i\alpha\Sigma) + \frac{(i\alpha\Sigma)^2}{2!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^3}{3!} + \frac{(i\alpha\Sigma)^4}{4!} + \dots \\
&= \mathbb{I} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\right) + i\Sigma \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots\right) \\
&= \mathbb{I}\cos(\alpha) + i\Sigma\sin(\alpha) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Ασκηση 4.

Έστω ότι έχουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις Ψ_1 και Ψ_2 με την ίδια ιδιοενέργεια E . Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} &= \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \Psi_1 \\
\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} &= \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \Psi_2 \\
\Rightarrow \frac{\Psi''_1}{\Psi_1} &= \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) = \frac{\Psi''_2}{\Psi_2} \\
\Rightarrow \Psi_2\Psi''_1 - \Psi_1\Psi''_2 &= 0 \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} (\Psi_2\Psi'_1 - \Psi_1\Psi'_2) &= 0
\end{aligned}$$

Αρνητική ποσοστήτα $\Psi_2\Psi'_1 - \Psi_1\Psi'_2$ είναι μια σταθερά και μάλιστα είναι μηδέν διότι $\Psi_1, \Psi_2 \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow \infty$. Έτσι

$$\begin{aligned}
\frac{\Psi'_1}{\Psi_1} &= \frac{\Psi'_2}{\Psi_2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln(\Psi_1)) = \frac{d}{dx}(\ln(\Psi_2)) \\
\frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2} \right) \right) &= 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{\Psi_1}{\Psi_2} \right) = \alpha \\
\Rightarrow \frac{\Psi_1}{\Psi_2} &= \beta, \beta = e^\alpha \Rightarrow \Psi_1 = \beta\Psi_2
\end{aligned}$$

γραμμικά εξαρτημένες. ■

Ασκηση 5.

α) Στάσιμες καταστάσεις

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} - \alpha\delta(x)\Psi = E\Psi$$

για $x \neq 0$ έχουμε μόνο τον κινητικό όρο

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi$$

Εάν $E < 0$ οφίζουμε το

$$k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2m|E|}{\hbar^2} > 0$$

και η λύση είναι η κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(x) = \begin{cases} Be^{kx} & , x < 0 \\ Ae^{-kx} & , x > 0 \end{cases}$$

Αφού μάλιστα η $\Psi(x)$ είναι συνεχής στο μηδέν, προκύπτει ότι $A = B$ και $\Psi(x) = Ae^{-k|x|}$. Προσδιορισμός του E :

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Schrödinger στο διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Psi'' dx - \alpha \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\Psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Psi(x) dx \\ &\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Psi(x) dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \quad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)\Psi(x) dx = \Psi(0) \\ &\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d}{dx}(\Psi') dx = \Psi'(x = \epsilon) - \Psi'(x = -\epsilon) \end{aligned}$$

για $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} [(-Ak) - (Ak)] - \alpha A = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\hbar^2 k}{m} = \alpha \Rightarrow k = \frac{m\alpha}{\hbar^2} \Rightarrow k^2 = \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4} \\ &\frac{2m|E|}{\hbar^2} = \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4} \Rightarrow |E| = \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \end{aligned}$$

Προσδιορισμός του A :
Κανονικοποίηση της $\Psi(x)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k|x|} dx = 1 \\ &\Rightarrow 1 = 2A^2 \int_0^{\infty} e^{-2kx} dx = \frac{2A^2}{2k} \Rightarrow A^2 = k \\ &\Rightarrow A = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3) Έστω κύμα προσπίπτον από τα αριστερά

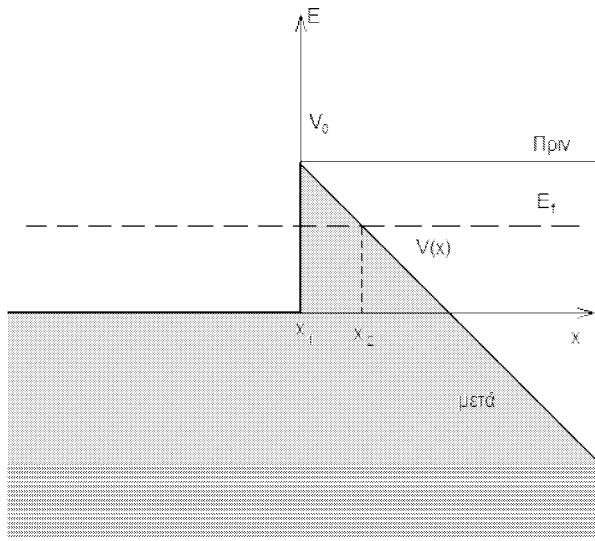
$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' - \alpha\delta(x)\Psi = E\Psi, \quad E > 0 \\ &\Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0, x \neq 0 \\ &\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad x < 0 \\ &\Psi_2(x) = Fe^{ikx}, \quad x > 0 \\ &\Psi_1(x=0) = \Psi_2(x=0) \Rightarrow A + B = F \\ &\left. \frac{d\Psi_1}{dx} \right|_{x=0} = ikA - ikB = ik(A - B) \\ &\left. \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{x=0} = ikF \end{aligned}$$

Από το ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Schrödinger από $(-\epsilon, \epsilon)$ για $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m} [ikF - ik(A - B)] = \alpha(A + B) \Rightarrow \\ &-\frac{\hbar^2}{2m} [ik(A + B) - ik(A - B)] = \alpha(A + B) \Rightarrow \\ &B = i\frac{m\alpha}{k\hbar^2}(A + B) \Rightarrow B = i\frac{\beta}{1-i\beta}A \\ &\text{με } \beta = \frac{m\alpha}{k\hbar^2}. \end{aligned}$$

Έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} R &= \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \\ T &= 1 - R = \frac{1}{1-\beta^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 6

Άσκηση 6.

Ο συντελεστής διέλευσης προσεγγιστικά είναι:

$$T \simeq e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} k_2(x) dx} = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(x)-E_f)} dx}$$

βρίσκουμε λοιπόν τα x_1 , x_2 και $V(x)$ όταν $\vec{E} = \mathcal{E}_0 \hat{x}$.

$$\begin{aligned} V(x) - V(0) &= \int_x^0 e \vec{E} d\vec{r} = \int_x^0 e \mathcal{E}_0 dx = -e \mathcal{E}_0 x, \quad V(0) = V_0 \\ \Rightarrow V(x) &= V_0 - e \mathcal{E}_0 x \end{aligned}$$

$$\text{σημεία } x_1, x_2, x_1 = 0 \Rightarrow E_f = V_0 - e \mathcal{E}_0 x_2$$

$$\begin{aligned} e \mathcal{E}_0 x_2 &= V_0 - E_f \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{(V_0 - E_f)}{e \mathcal{E}_0} \end{aligned}$$

Ορίζουμε $W = V_0 - E_f = \sigma v \alpha \tau \eta \sigma \gamma \epsilon \rho \gamma \sigma \nu$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{W}{e \mathcal{E}_0} \\ T &= \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{x_2} \sqrt{V_0 - E_f - e \mathcal{E}_0 x} dx \right) \\ T &= \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{\frac{W}{e \mathcal{E}_0}} \sqrt{W - e \mathcal{E}_0 x} dx \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^{\frac{W}{e \mathcal{E}_0}} \sqrt{e \mathcal{E}_0} \sqrt{\frac{W}{e \mathcal{E}_0} - x} dx \right) \end{aligned}$$

Όμως

$$\int_0^{x_2} \sqrt{x_2 - x} dx = \left(-\frac{2}{3} \right) (x_2 - x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3} (x_2)^{\frac{3}{2}}$$

Άρα

$$T = \exp \left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{W^{\frac{3}{2}}}{e\mathcal{E}_0} \right)$$

που είναι ο τύπος των Fowler - Nordheim.

■

Άσκηση 7.

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

όπου $N = \sqrt{\frac{2}{L}} \lambda \gamma \omega$ κανονικοποιησης.

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \left(1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) \right) dx$$

Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} \int x \sin^2(ax) dx &= \frac{x^2}{4} - x \frac{\sin(2ax)}{4a} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2} \\ \int x^2 \cos(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin(ax) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \\ \Rightarrow \Delta x &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{L}{\sqrt{12}} \left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$$\langle p \rangle = 0$$

για κάθε πραγματική κυματοσυνάρτηση.

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= (-ih)^2 \int_0^L \Psi(x) \Psi''(x) dx = \\ &= (-i\hbar)^2 \left(\int_0^L (\Psi(x) \Psi'(x))' dx - \int_0^L \Psi'(x) \Psi'(x) dx \right) = \\ &= 0 + \hbar^2 \int_0^L \left(\frac{d\Psi}{dx} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα όμως έχουμε

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p^2 = 2mH \\ \Rightarrow \langle p^2 \rangle &= 2m \langle H \rangle = 2mE_n = 2m \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \\ \Rightarrow \langle p^2 \rangle &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2} n^2 \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = \frac{\hbar \pi}{L} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta x)(\Delta p) &= \frac{\hbar \pi}{\sqrt{12}} n \left(1 - \frac{6}{n^2 p^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ n = 1 \Rightarrow (\Delta x)(\Delta p) &= h \frac{\pi}{\sqrt{12}} \sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} \simeq 0.568h \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \Psi &= E \Psi \\ V(x, y) &= \begin{cases} \infty & , \{x < 0 \vee x > a\} \wedge \{y < 0 \vee y > b\} \\ 0 & , \{0 < x < a\} \wedge \{0 < y < b\} \end{cases} \\ \Psi(x, y) &= \Psi_1(x) \Psi_2(y), \quad E = E_1 + E_2 \\ \Psi(x = 0, y = 0) &= 0, \Psi(x = a, y = b) = 0 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Schrödinger έχουμε δύο εξισώσεις που πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} = E_1 \Psi_1 \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} = E_2 \Psi_2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{2mE_1}{\hbar^2}, \quad \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} = -k_1^2 \Psi_1 \\ \Psi_1(x) &= \sin k_1 x \\ k_1 a &= n_1 \pi \Rightarrow k_1 = n_1 \frac{\pi}{a}, \quad n_1 = 1, 2, \dots \\ 2 \frac{mE_1}{\hbar^2} &= \frac{n_1^2 \pi^2}{a^2} \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{n_1} = \sin \left(\frac{n_1 \pi}{a} x \right) \\ E_{n_1} = n_1^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ομοίως

$$(2) \Rightarrow \begin{aligned} \Psi_{n_2} &= \sin \left(\frac{n_2 \pi}{b} x \right) \\ E_{n_2} &= n_2^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \\ \Rightarrow \Psi_{n_1, n_2}(x, y) &= A_{n_1, n_2} \sin \left(\frac{n_1 \pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n_2 \pi y}{b} \right) \\ E_{n_1, n_2} &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^b dy A_{n_1, n_2}^2 \sin^2 \left(\frac{n_1 \pi x}{a} \right) \sin^2 \left(\frac{n_2 \pi y}{b} \right) &= 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

Άσκηση 9.

$$\begin{aligned} \int \Psi^*(x, 0) \Psi(x, 0) dx &= 1 \\ \Rightarrow \int \Psi^*(x, 0) \Psi(x, 0) dx &= N^* N \int (\Psi_1^* + \Psi_2^*) (\Psi_1 + \Psi_2) dx = \\ &= N^* N \left(\int \Psi_1^* \Psi_1 dx + 0 + 0 + \int \Psi_2^* \Psi_2 dx \right) = 2N^* N \\ \Rightarrow N^2 &= \frac{1}{2}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{2}}, N \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_1(x) e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} + \Psi_2(x) e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \right) \\ \langle x \rangle_t &= \int \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^L x \Psi_1^*(x) \Psi_1(x) dx + \int_0^L x \Psi_2^*(x) \Psi_2(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^L x \Psi_1^* e^{i \frac{E_1 t}{\hbar}} \Psi_2(x) e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} dx + \int_0^L x \Psi_2^* e^{i \frac{E_2 t}{\hbar}} \Psi_1(x) e^{-i \frac{E_1 t}{\hbar}} dx \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \\ \Psi_2(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad E_2 = 4 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{L^2}{\pi^2}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{L} d\frac{\pi x}{L} \\ &= \frac{2L}{\pi^2} \int_0^\pi y \sin^2 y dy = \frac{2L}{\pi^2} \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y \sin 2y}{4} - \frac{\cos 2y}{8} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2L}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{4} - 0 - \frac{1}{8}(1 - 1) \right) = \frac{2L}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{L}{2}\end{aligned}$$

ομοίως

$$\frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$$

$E_{\tau\sigma\iota}$

$$\langle x \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(e^{i(E_1 - E_2) \frac{t}{\hbar}} + e^{-i(E_1 - E_2) \frac{t}{\hbar}} \right) \int_0^L \Psi_1(x) x \Psi_2(x) dx$$

Οριζούμε:

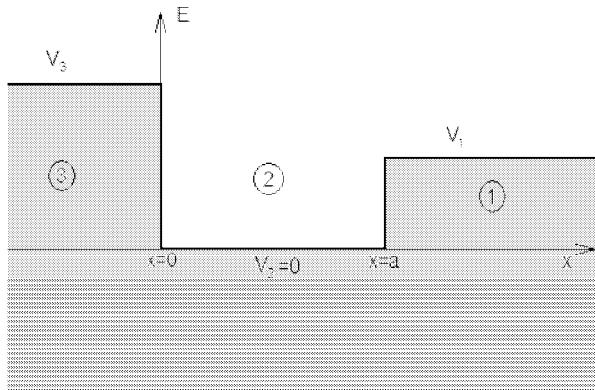
$$\begin{aligned}w_{12} &= \frac{E_1 - E_2}{\hbar}, \quad \langle x \rangle_{12} = \int_0^L \Psi_1(x) x \Psi_2(x) dx \\ \langle x \rangle_t &= \frac{L}{2} + \langle x \rangle_{12} \cos(w_{12} t)\end{aligned}$$

Τέλος ισχύει.

$$\langle x \rangle_{12} = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = -\frac{16}{9\pi^2} L$$

$\chi\alpha\vartheta\omega\varsigma$

$$2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 11

Άσκηση 11.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi$$

Ζητάμε το διακριτό φάσμα, άρα έχουμε: $V_3 > V_1 > E > 0$.
Λύνουμε το πρόβλημα κατά περιοχές:

$$\begin{aligned} 3) \Rightarrow \quad & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_3}{dx^2} + V_3\Psi_3 = E\Psi_3, \quad k_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_3 - E) \\ & \frac{d^2\Psi_3}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V_3 - E)\Psi_3 \\ & \Psi_3'' = k_3^2\Psi_3 \Rightarrow \Psi_3(x) = A_3 e^{k_3 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \Rightarrow \quad & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} = E\Psi_2, \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \\ & \Psi_2'' = -k_2^2\Psi_2 \\ & \Rightarrow \Psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \Rightarrow \quad & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + V_1\Psi_1 = E\Psi_1, \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_1 - E) \\ & \Psi_1'' = k_1^2\Psi_1 \Rightarrow \Psi_1(x) = B_1 e^{-k_1 x} \end{aligned}$$

Η $\Psi(x)$ είναι συνεχής για $x = 0$ και $x = a$.
Επίσης, η $\frac{d\Psi}{dx}$ είναι συνεχής και αυτή στα ίδια σημεία.

Ετσι

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad A_3 &= A_2 + B_2 \\ A_3 k_3 &= iA_2 k_2 - iB_2 k_2 \\ x = a : e^{-k_1 \alpha} B_1 &= A_2 e^{ik_2 a} + B_2 e^{-ik_2 a} \\ -B_1 k_1 e^{-k_1 \alpha} &= iA_2 k_2 e^{ik_2 a} - iB_2 k_2 e^{-ik_2 a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad A_2 k_3 + B_2 k_3 &= iA_2 k_2 - iB_2 k_2 \\ \Rightarrow A_2(k_3 - ik_2) &= -B_2(k_3 + ik_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = a : \quad -A_2 k_1 e^{ik_2 a} - B_2 k_1 e^{-ik_2 a} &= iA_2 k_2 e^{ik_2 a} - iB_2 k_2 e^{-ik_2 a} \\ \Rightarrow -A_2(k_1 + ik_2) e^{ik_2 a} &= B_2(k_1 - ik_2) e^{-ik_2 a} \end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{k_1 + ik_2}{k_3 - ik_2} e^{ik_2 a} &= \frac{k_1 - ik_2}{k_3 + ik_2} e^{-ik_2 a} \\ e^{i2k_2 a} &= \frac{(k_1 - ik_2)(k_3 - ik_2)}{(k_1 + ik_2)(k_3 + ik_2)} \end{aligned}$$

Την παραπάνω εξίσωση την λύνουμε γραφικά. ■

Τπόδειξη:

$$e^{2ik_2 \alpha} = [\text{Πραγματικό Μέρος}] + i[\text{Φανταστικό Μέρος}] \text{ και} \\ \tan(2k_2 \alpha) = [\text{Φανταστικό Μέρος}] / [\text{Πραγματικό Μέρος}]$$

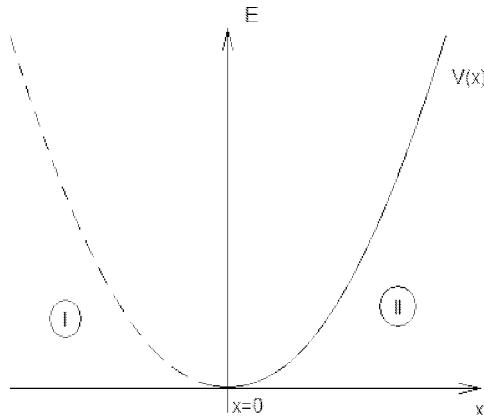
Ορίζουμε τους αδιάστατους αριθμούς

$$z = 2k_2 a = 2\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \sqrt{E} a, \quad z_1 = \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \sqrt{V_1} a \text{ και} \quad z_3 = \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \sqrt{V_3} a.$$

Ετσι

$$\tan(z) = -\frac{z\sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}} \left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) + \left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right) z\sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}{\left(z_1^2 - \frac{z^2}{2}\right) \left(z_3^2 - \frac{z^2}{2}\right) - z^2 \sqrt{z_1^2 - \frac{z^2}{4}} \sqrt{z_3^2 - \frac{z^2}{4}}}$$

Η γραφική λύση συνίσταται στην εύρεση των σημείων τομής των γραφημάτων που προκύπτουν από το αριστερό και δεξί μέλος ξεχωριστά της παραπάνω παράστασης με τον περιορισμό για το z , $4z_1^2 \geq z^2$.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 12

Άσκηση 12.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = E\Psi$$

Περιοχή I: $\Psi_1(x) = 0$

Περιοχή II: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{1}{2}mx^2\omega^2\Psi_2 = E\Psi_2$ με την συνθήκη $\Psi_2(x = 0) = 0$.

Οι συναρτήσεις $\Psi_n(x) = c_n e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} H_n(\sqrt{\alpha}x)$ με $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ εκανοποιούν την εξίσωση του Schrödinger για κάθε x , με ενέργεια $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

Τα $H_n(\sqrt{\alpha}x)$ είναι πολυώνυμα του $\sqrt{\alpha}x$ άρτια ή περιττά ανάλογα με το n .

Άρα για $n = 2k + 1 \Rightarrow H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x) = \text{πολυώνυμο περιττού βαθμού}$.

$$\Rightarrow H_{2k+1}(x = 0) = 0$$

$$\Rightarrow \Psi_k(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ c_{2k+1} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} H_{2k+1}(\sqrt{\alpha}x) & , x > 0 \end{cases}$$

$$E_k = (2k + \frac{3}{2})\hbar\omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ελάχιστη ενέργεια:

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας στον χώρο των ορμών για έναν ταλαντωτή στην πρώτη διεγερμένη στάθμη.

Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί ο ταλαντωτής να έχει ορμή στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή για αυτήν την ενέργεια;

Ασκηση 2.

Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή $(xp_x + p_xx)^2$ ως προς την κυματοσυνάρτηση $\Psi_n, n > 2$, ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Ασκηση 3.

α^\dagger και α είναι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για έναν μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των α και α^\dagger , και τις ιδιότητες $\alpha^\dagger \Psi_n = \sqrt{n+1} \Psi_{n+1}$, $\alpha \Psi_n = \sqrt{n} \Psi_{n-1}$ όπου οι Ψ_n είναι ιδιουσναρτήσεις του ταλαντωτή.

α) Δείξτε ότι

$$x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1})$$
$$\frac{d\Psi_n}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1})$$

β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle n|x^2|n\rangle$ και $\langle n|P^2|n\rangle$ καθώς και το γινόμενο αβεβαιότητας $(\Delta x)(\Delta P)$.

γ) Γράψτε τους πίνακες x_{nm} , P_{nm} και N_{nm} , όπου N είναι ο τελεστής αριθμού κβάντων (αριθμησης).

Ασκηση 4.

α) Κάθε γινόμενο τελεστών α^\dagger και α , με το ίδιο πλήθος τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, είναι μια συνάρτηση του τελεστή αριθμησης \hat{N} , όπου $\hat{N} = \alpha^\dagger \alpha$.

β) Δείξτε ότι $a^n (\alpha^\dagger)^n = (\hat{N} + 1)(\hat{N} + 2) \cdots (\hat{N} + n)$ και $(\alpha^\dagger)^n a^n = \hat{N}(\hat{N} - 1) \cdots (\hat{N} - n + 1)$.

Ασκηση 5.

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τις ιδιουσναρτήσεις των δέσμων καταστάσεων για ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με ένα πρόσθετο δέλτα πηγάδι δυναμικού στο κέντρο του.

Άσκηση 6.

Να υπολογιστούν οι ενέργεις των δέσμιων καταστάσεων για την μονοδιάστατη δυναμική ενέργεια $V(x) = -\frac{g}{x}$.

Η δυναμική ενέργεια ορίζεται για $x > 0$ με τον περιορισμό $\Psi(0) = 0$, $g > 0$.

Άσκηση 7.

Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας m , σε μία διάσταση, δίνεται από την σχέση

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \wedge x > \alpha \\ 0, & 0 \leq x < \beta \wedge \gamma < x \leq \alpha \\ V_0, & \beta \leq x \leq \gamma \end{cases}$$

Θεωρώντας το V_0 σαν διαταραχή να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n και τις κυματοσυναρτήσεις Φ_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

Άσκηση 8.

Σωματίδιο μάζας m , στην μια διάσταση, έχει δυναμική ενέργεια $V(x) = V_0 e^{\lambda x^2}$ με $\lambda > 0$. Υπολογίστε προσεγγιστικά την θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη.

Άσκηση 9.

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m στο επίπεδο (x, y) δίνεται από την σχέση

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + cxy$$

Όπου c είναι μια σταθερά.

- α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για $c = 0$.
- β) Εάν $c \neq 0$ και $c \ll m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας των διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος.
- γ) Να υπολογίσετε ακριβώς τις ενέργειες και τις κυματοσυναρτήσεις του συστήματος για κάθε $c \leq m\omega^2$.

Υπόδειξη, να ορίσετε δυο νέες μεταβλητές, τις $x = v + z$ και $y = v - z$.

Άσκηση 10.

Την χρονική στιγμή $t = 0$, ένα χραντομηχανικό σύστημα είναι σε μια κατάσταση $\Psi_1^{(0)}$, η οποία ανήκει σε μια διπλά εκφυλισμένη στάθμη. Να οριστεί η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\Psi_2^{(0)}$ με την ίδια αδιατάραχτη ενέργεια κάποια χρονική στιγμή $t \neq 0$. Η μετάβαση οφείλεται στην δράση μιας διαταραχής $V(x)$ χρονικά σταθερής.

Άσκηση 11.

Φορτισμένος αρμονικός ταλαντωτής στην κατάσταση Ψ_n αλληλεπιδρά με ένα περαστικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{-\lambda t^2}, \lambda > 0, \vec{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 \hat{x}$$

Βρείτε το πλάτος μετάβασης στην κατάσταση Ψ_m .

Άσκηση 12.

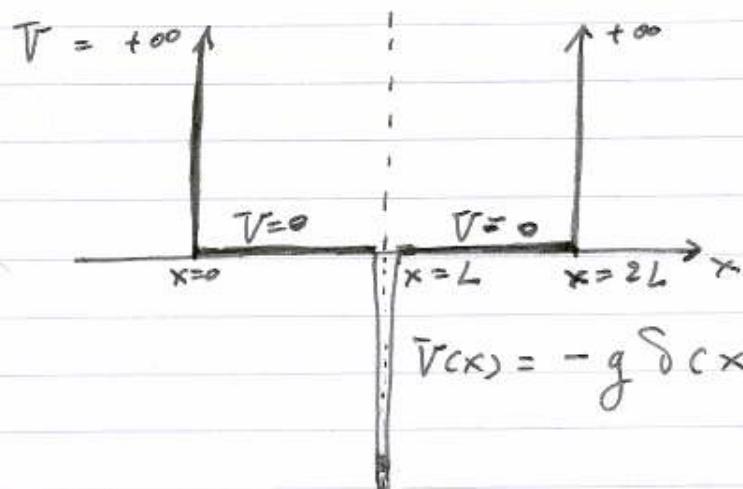
Ένα ομαλό ηλεκτρικό πεδίο δρά ξαφνικά σε έναν φορτισμένο αρμονικό ταλαντωτή στην υεμελιώδη κατάσταση. Να ορίσετε την πιθανότητα μετάβασης του ταλαντωτή στις διεγερμένες καταστάσεις.

(1)

Κβανγκριτική ΙΙ., ΣΕΜΦΕ

Άλογος Τύπος Σειράς τονισμένη, Συγκρίψιμη.

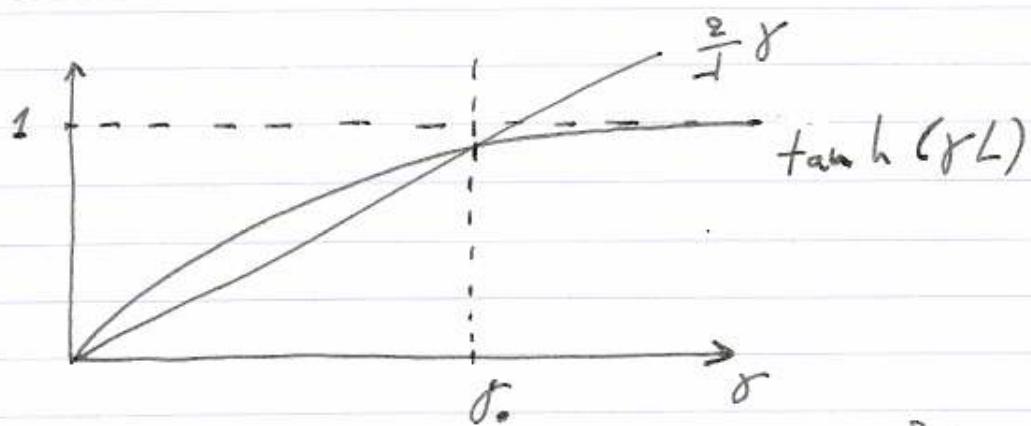
Σχήμα 1 (Άσκηση 5)



$$\bar{V}(x) = -g \delta(x-L)$$

Γραφική Παράσταση των δυναμικών.

Σχήμα 2 (Άσκηση 5)



συγκριτικός τομής των δύο συναρτήσεων.

Γραφική Παράσταση των δύο συναρτήσεων
και η γραφική σύσταση.

(2)

Άσκηση 1η: Απαντήστε τις ανωτέρω συνάντησης στην διεγερσία οράθηκε εξ ου Ερίγγια
με $E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$

Κατ' έκφραση της ροής: $\mathcal{W}_k(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (2\alpha)^{\frac{1}{2}} x e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$
όπου $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$ $\Rightarrow \mathcal{W}_k(x) = A \times e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$.

(i) Χρησιμοποιήστε την παραπάνω πληρότητας την οποίαν.

$$\Phi(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_P^*(x) \mathcal{W}_k(x) dx, \quad \mathcal{W}_P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{Px}{\hbar}}$$

$$\Rightarrow \Phi(P) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2\alpha}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} e^{-i\frac{Px}{\hbar}} dP$$

$$\text{οχιών: } I_0(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

$$\frac{dI_0}{db} = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2 + bx} dx = \frac{b}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

$$\text{όπου } b = -\frac{iP}{\hbar}, \quad a = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \Phi(P) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2\alpha}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-iP}{\hbar\alpha}\right) e^{-\frac{P^2}{2\hbar^2\alpha}}$$

$$\Phi(P) = -i \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{\hbar\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}_{B} \left(\frac{P}{\hbar\sqrt{\alpha}}\right) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{P}{\hbar\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

$$\text{οποίος } k = \frac{P}{\hbar\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \Phi(k) = -i B k e^{-\frac{k^2}{2}}$$

(ii) Πιστωτικανα βασιστει στα ποτωμανα με
οπως συν καροκινη απορρηψην προχει.

$$E_1 = \frac{P^2}{2m} + V(x_1), E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$$

Καροκινη εξαγεται προτονα αριν για $x = \infty$

$$V(x=\infty) = 0 \Rightarrow E_1 = \frac{P_1^2}{2m} \Rightarrow P_1^2 = 2m E_1 = 3m \hbar \omega$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{3m \hbar \omega}$$

$$P_2(\lvert P \rvert \geq P_1) = 2 \int_{P_1}^{\infty} \phi_{(P)}^* \phi_{(P)} dP$$

η πιστωτικανα ποτι γιατην.

$$P_2 = 2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\hbar \alpha} \right) \int_{K_1}^{\infty} k^2 e^{-k^2} dk (\sqrt{\alpha \hbar})$$

$$\text{οπου } K_1 = \frac{P_1}{\hbar \sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{3m \hbar \omega}}{\hbar \sqrt{m \omega}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} k^2 e^{-k^2} dk \approx 0.11161$$

Άρκυν 2: Ο τηλεοις $A = X P + P X$ ειναι
επιτυχοις

$$A^\dagger = (X P + P X)^\dagger = P X + X P = A$$

Τι λειται οι τηλεοις X και P ειναι επιτυχοις.

(4)

$$\text{arccos} [\bar{x}, \bar{p}] = it \Rightarrow x\bar{p} - \bar{p}x = it$$

$$\Rightarrow A = x\bar{p} + \bar{p}x = 2\bar{p}x + it$$

$$\begin{aligned} \langle n | (x\bar{p} + \bar{p}x)^2 | h \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x\bar{p} + \bar{p}x)(x\bar{p} + \bar{p}x) \psi_n dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* A A \psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (A \psi_n)^* (A \psi_n) dx \end{aligned}$$

υηογισαρε των δραστικων η A οπωρ ψn
χρησηροτερος τα αποτυγεομετα των αδκνων 3.

$$x \psi_n = \sqrt{\frac{t}{8\pi\omega}} (\sqrt{n} \psi_{n-1} + \sqrt{n+1} \psi_{n+1})$$

$$\bar{p}x \psi_n = \sqrt{\frac{t}{8\pi\omega}} \sqrt{n} \bar{p} \psi_{n-1} + \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{t}{8\pi\omega}} \bar{p} \psi_{n+1} =$$

$$= (-it) \sqrt{\frac{n\omega}{2t}} \sqrt{\frac{t}{8\pi\omega}} \sqrt{n} (\sqrt{n-1} \psi_{n-2} - \sqrt{n} \psi_n)$$

$$+ (-it) \sqrt{\frac{n\omega}{2t}} \sqrt{\frac{t}{8\pi\omega}} \sqrt{n+1} (\sqrt{n+1} \psi_n - \sqrt{n+2} \psi_{n+2})$$

$$= (-it) \frac{1}{2} \left(\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - n \psi_n + (n+1) \psi_n - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2} \right)$$

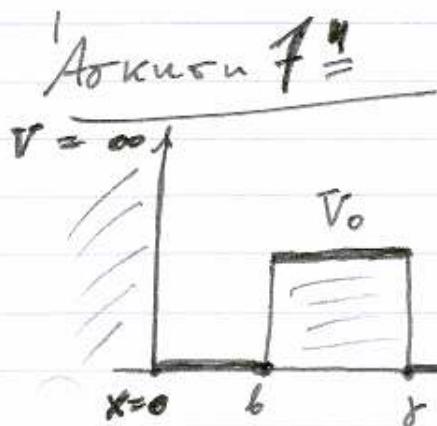
$$\bar{p}_x \psi_n = \frac{-it}{2} \left(\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} + 2\psi_n - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2} \right)$$

$$\Rightarrow A \psi_n = (2\bar{p}_x + it) \psi_n = (-it) \left(\sqrt{n(n-1)} \psi_{n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)} \psi_{n+2} \right)$$

(5)

$$\begin{aligned} \rightarrow \langle h | (Px + xP)^2 | n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (A\psi_n)^* (A\psi_n) dx = \\ &= (-ih)^* (-ih) \left[n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n-2}^* \psi_{n-2} dx + (n+1)(n+2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+2}^* \psi_{n+2} dx \right] \\ &= \hbar^2 [n(n-1) + (n+1)(n+2)] = \hbar^2 (n^2 + 3n + 2). \end{aligned}$$

Siori $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^* \psi_k dx = 1$ και $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^* \psi_\ell dx = 0$
όταν $k \neq \ell$



Λύνεται ως άνευρο
νημάτι, διαμορφώνοντας
την $0 < x < a$.

Συμπίπτει ως $V(x) = V_0$
για $b < x < g$ σαν
διαταξίδιο.

$$\psi_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n^{(0)} = \hbar^2 \frac{n^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Διόρθων ουσιών εργασίας σε πολύν την της θερμίδας
διαταξίδιων: $E_n = E_n^{(0)} + W_n$

$$\begin{aligned} W_n = V_{nn} &= \langle n | V(x) | n \rangle = \int_0^a \psi_n^{(0)*} V(x) \psi_n^{(0)} dx = \\ &= \frac{2V_0}{a} \int_b^g \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \end{aligned}$$

(6)

$$\int \sin^2 kx dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}$$

$$\Rightarrow W_n = \frac{2V_0}{a} \left\{ \frac{r-b}{2} + \frac{a}{4n\pi} \left[\sin\left(\frac{2n\pi b}{a}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi r}{a}\right) \right] \right\}$$

$$W_n = V_0 \frac{r-b}{a} + \frac{V_0}{2n\pi} \left[\sin \frac{2n\pi b}{a} - \sin \frac{2n\pi r}{a} \right]$$

$$W_n = V_0 \frac{r-b}{a} - \frac{V_0}{n\pi} \cos\left(n\pi \frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{r-b}{a}\right)$$

Kαραποντάρισμα σε πούτη ταξιανό θ.Δ. :

$$\Phi_n = \Psi_n^{(0)} + \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \Psi_k^{(0)}$$

$$E_n^{(0)} - E_k^{(0)} = (n^2 - k^2) \frac{\pi^2 t^2}{8ma^2}$$

$$V_{kn} = 2 \frac{V_0}{a} \int_b^r \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad k \neq n$$

$$\int_b^r \sin px \sin qx dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} \Big|_b^r - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} \Big|_b^r$$

$$V_{kn} = \frac{V_0}{n(k-n)} \left[\sin\left(n(k-n)\frac{r}{a}\right) - \sin\left(n(k-n)\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$- \frac{V_0}{n(k+n)} \left[\sin\left(n(k+n)\frac{r}{a}\right) - \sin\left(n(k+n)\frac{b}{a}\right) \right]$$

$$V_{kn} = \frac{2V_0}{n(k-n)} \cos\left(n(k-n)\frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n(k-n)\frac{r-b}{a}\right)$$

$$- \frac{2V_0}{n(k+n)} \cos\left(n(k+n)\frac{r+b}{a}\right) \sin\left(n(k+n)\frac{r-b}{a}\right)$$

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 3.

α)

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \\
 \hat{\alpha}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} \\
 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x &= \hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) \\
 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} &= \hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger \Rightarrow \frac{d}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}^\dagger) \\
 x\Psi_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{\alpha}\Psi_n + \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
 \frac{d\Psi_n}{dx} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\hat{\alpha}\Psi_n - \hat{\alpha}^\dagger\Psi_n) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
 \langle n|x^2|n\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n x^2 \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x\Psi_n)(x\Psi_n) dx \\
 x\Psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
 \alpha &= \frac{m\omega}{\hbar} \\
 x^2\Psi_n &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{n}x\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}x\Psi_{n+1}) = \\
 &= \frac{1}{2\alpha}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} + \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\
 \Rightarrow \langle n|x^2|n\rangle &= \frac{1}{2\alpha}\langle n|n\rangle(n + (n+1)) = \frac{2n+1}{2\alpha} \\
 p\Psi_n &= (-i\hbar)\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} - \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}) \\
 p^2\Psi_n &= (-i\hbar)^2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{n}\frac{d\Psi_{n-1}}{dx} - \sqrt{n+1}\frac{d\Psi_{n+1}}{dx}\right) = \\
 &= (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}(\sqrt{n}\sqrt{n-1}\Psi_{n-2} - \sqrt{n}\sqrt{n}\Psi_n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\Psi_n + \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\Psi_{n+2}) \\
 \Rightarrow \langle n|p^2|n\rangle &= (-\hbar^2)\frac{\alpha}{2}\langle n|n\rangle(-n - (n+1)) = \hbar^2\frac{2n+1}{2}\alpha \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle &= \frac{\langle P^2\rangle}{2m} \Rightarrow \langle \Delta v \alpha \mu \nu \rangle \text{ Enérgieias} = \langle Kinetik \rangle \text{ Enérgieias}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle n|x|n \rangle = 0, \quad \langle p \rangle = \langle n|p|n \rangle = 0 \\ (\Delta x)^2(\Delta p)^2 &= \frac{2n+1}{2\alpha}(\hbar^2) \frac{2n+1}{2}\alpha = \frac{(2n+1)^2}{4}\hbar^2 \\ (\Delta x)(\Delta p) &= \frac{2n+1}{2}\hbar \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$\gamma)$

$$\begin{aligned}x|m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\sqrt{m}|m-1\rangle + \sqrt{m+1}|m+1\rangle) \\ x_{nm} &= \langle n|x|m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle \\ x_{nm} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n+1} & , n = m-1 \Rightarrow m = n+1 \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha}}\delta_{n,n-1} & , n = m+1 \Rightarrow m = n-1 \end{cases} \\ (x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \sqrt{5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p|m\rangle &= -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}|m-1\rangle - \sqrt{m+1}|m+1\rangle) \\ p_{nm} &= \langle n|p|m \rangle = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle - \sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle) \\ p_{nm} &= \begin{cases} -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n+1} & , m = n+1 \\ i\hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n} & , m = n-1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$N|m\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle = \sqrt{m}\hat{a}^\dagger|m-1\rangle = m|m\rangle$$

$$N_{nm} = \langle n|N|m \rangle = m\langle n|m \rangle = n\delta_{n,m}$$

$$(N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Ασκηση 4.

α) Έστω $\hat{A} = \alpha^n(\alpha^\dagger)^n$

Εάν ο τελεστής \hat{A} δράσει σε μια ιδιοσυνάρτηση του N , έστω την Ψ_k , τότε όταν επαναφέρει στον εαυτό της αφού η συνολική μετατόπιση που προκαλείται στην ιδιοτιμή k όταν είναι μηδέν. Η δράση του τελεστή δημιουργίας α^\dagger όταν εντισταθμίζεται από ισάριθμες δράσεις του τελεστή α .

$$\hat{N}\Psi_k = k\Psi_k, \quad \hat{A}\Psi_k = f(k)\Psi_k$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε Ψ_k .

Άρα η δράση του \hat{A} όταν είναι ισοδύναμη με την δράση του τελεστή $f(\hat{N})$ επάνω στις Ψ_k

$$\Rightarrow \hat{A} \equiv f(\hat{N})$$

β) Παίρνουμε τυχούσα ιδιοσυνάρτηση των α, α^\dagger και \hat{N} , την Ψ_k .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^\dagger \Psi_k &= \sqrt{k+1} \Psi_{k+1}, \quad \alpha \Psi_k = \sqrt{k} \Psi_{k-1} \\ \alpha^n (\alpha^\dagger)^n \Psi_k &= \alpha^n (\alpha^\dagger)^{n-1} \Psi_{k+1} \sqrt{k+1} = \\ &= \alpha^n (\alpha^\dagger)^{n-2} \sqrt{k+1} \sqrt{k+2} \Psi_{k+2} = \\ &\vdots \\ &= \alpha^n \sqrt{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)} \Psi_{k+n} = \\ &= \sqrt{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)} \alpha^{n-1} \sqrt{k+n} \Psi_{k+n-1} = \\ &\vdots \\ &= \sqrt{(k+1)(k+2) \cdots (k+n)} \sqrt{(k+n)(k+n-1) \cdots (k+1)} \Psi_k = \\ \Rightarrow (\alpha^n) (\alpha^\dagger)^n \Psi_k &= (k+1)(k+2) \cdots (k+n) \Psi_k \end{aligned}$$

για κάθε κυματοσυνάρτηση Ψ_k του αρμονικού ταλαντωτή

$$\Rightarrow \alpha^n (\alpha^\dagger)^n = (\hat{N} + 1)(\hat{N} + 2) \cdots (\hat{N} + n)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^\dagger)^n \alpha^n \Psi_k &= (\alpha^\dagger)^n \sqrt{k} \sqrt{k-1} \cdots \sqrt{k-(n-1)} \Psi_{k-n} = \\ &= \sqrt{k(k-1) \cdots (k-(n-1))} \sqrt{(k-n+1)(k-n+2) \cdots (k)} \Psi_{k-n+n} \\ &= k(k-1) \cdots (k-(n-1)) \Psi_k \\ \Rightarrow (\alpha^\dagger)^n \alpha^n &= \hat{N}(\hat{N}-1) \cdots (\hat{N}-(n-1)) \end{aligned}$$

Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση του δυναμικού για το πρόβλημα 5

Ασκηση 5.

α) Λύσεις Αρνητικής Ενέργειας:

$$E = -|E| < 0$$

Περιοχή A:, $0 \leq x < L$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= E\Psi, \quad \gamma^2 = 2m \frac{|E|}{\hbar^2} \\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= -2m \frac{E}{\hbar^2} \Psi = \gamma^2 \Psi \Rightarrow \Psi(x) = e^{\pm\gamma x} \\ \Psi_A(0) = 0 &\Rightarrow \Psi_A(x) = A \sinh(\gamma x) \end{aligned}$$

Περιοχή B:, $L < x \leq 2L$

$$\Psi_B(2L) = 0, \Rightarrow \Psi_B(x) = B \sinh(\gamma(x - 2L))$$

Η συνέχεια της συνάρτησης μας δίνει

$$\begin{aligned} \Psi_A(L) = \Psi_B(L) &\Rightarrow A \sinh(\gamma L) = B \sinh(-\gamma L) = -B \sinh(\gamma L) \\ \Rightarrow A &= -B \end{aligned}$$

Η $\Psi(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση του Schrödinger, άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' - g\delta(x - L)\Psi = E\Psi$$

Ολοκληρώνουμε γύρω από το σημείο της ασυνέχειας

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi''(x)dx - g \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi(x)\delta(x - L)dx = E \int_{L-\epsilon}^{L+\epsilon} \Psi(x)dx$$

Το δεξί μέλος τείνει στο μηδέν για $\epsilon \rightarrow 0$, άρα

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=L+\epsilon} - \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{x=L-\epsilon} \right) = g\Psi(L)$$

Παίρνοντας το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ από αριστερά έχουμε

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right] &= g\Psi_A(L) \\ \gamma B \cosh(\gamma L) - \gamma A \cosh(\gamma L) &= -\frac{2mg}{\hbar^2} A \sinh(\gamma L) \end{aligned}$$

Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση των δυο συναρτήσεων και η γραφική λύση

$$\text{Ορίζουμε } \lambda = \frac{2mg}{\hbar^2} \text{ και παίρνουμε την εξίσωση}$$

$$2\gamma \cosh(\gamma L) = \lambda \sinh(\gamma L) \Rightarrow \tanh(\gamma L) = 2 \frac{\gamma}{\lambda}$$

Κάνοντας γραφική παράσταση της υπερβολικής εφαπτομένης $\tanh(\gamma L)$ συναρτήσει του γ , η τομή με την ευθεία $\frac{2}{\lambda}\gamma$ δίνει την ενέργεια.

Έχουμε μια μη μηδενική λύση όταν η κλίση της ευθείας είναι μικρότερη από την κλίση της υπερβολικής εφαπτομένης στην αρχή. Δηλαδή:

$$\left. \frac{d}{d\gamma} \tanh(\gamma L) \right|_{\gamma=0} = L$$

$$\text{και πρέπει να έχουμε } \frac{2}{\lambda} < L$$

$$\Rightarrow \lambda L > 2$$

Εάν $\lambda L = 2$ έχουμε μια λύση με μηδενική ενέργεια ($\gamma_0 = 0$).
Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται για $E=0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} - g\delta(x-L)\Psi = 0$$

για $x \neq L$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0 \Rightarrow & \begin{cases} \Psi_A(x) = Ax \\ \Psi_B(x) = B(2L-x) \end{cases} \\ \Psi_A(L) = \Psi_B(L) \Rightarrow & AL = BL \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση της εξίσωσης του Schrödinger

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right) &= g\Psi_A(L) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}(-2A) &= gAL \Rightarrow 2A = \frac{2mg}{\hbar^2}LA \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2 = \lambda L$ που ικανοποιείται.

β) Λύσεις Θετικής Ενέργειας

$$x \neq L \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\Psi, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_A(x) = A \sin(kx) & , 0 \leq x < L \\ \Psi_B(x) = B \sin(k(x-2L)) & , L < x \leq 2L \end{cases}$$

Συνέχεια της συνάρτησης για $x = L$, δίνει

$$A \sin(kL) = B \sin(-kL)$$

$$\text{Εάν } \sin(kL) \neq 0 \Rightarrow A = -B$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger έχουμε

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\Psi_B}{dx}(L) - \frac{d\Psi_A}{dx}(L) \right) = g\Psi_A(L)$$

$$2k \cos(kL) = \frac{2mg}{\hbar^2} \sin(kL) = \lambda \sin(kL)$$

$$\Rightarrow \tan(kL) = \frac{2}{\lambda}k$$

Η λύση είναι πάλι γραφική από την τομή της εφαπτομένης $\tan(kL)$ με την ευθεία $\frac{2}{\lambda}k$.

$$\text{Για } \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{2L}n$$

$$\text{με ενέργεια } E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του Schrödinger βρίσκουμε $A = B$. ■

Άσκηση 6.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' - \frac{g}{x}\Psi = E\Psi, \quad E < 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + \left(E + \frac{g}{x}\right)\Psi = 0, \quad E = -|E|$$

Διαστατική ανάλυση:

To g έχει διαστάσεις Joules·Length,

$$\frac{\hbar^2}{m} = \frac{\text{Joule}^2 \cdot \text{sec}^2}{\text{kgr}} = \frac{\text{Joule} \cdot \text{sec}^2}{\text{kgr}} \left(\frac{\text{Length}}{\text{sec}} \right)^2$$

$$\frac{\hbar^2}{m} = \text{Joule} \cdot (\text{Length})^2, \quad \alpha = \frac{m}{\hbar^2}g = \frac{\text{Joule} \cdot \text{Length}}{\text{Joule} \cdot (\text{Length})^2} = \frac{1}{\text{Length}}$$

Ορίζουμε:

$$\alpha = \frac{mg}{\hbar^2} \Rightarrow \eta \text{ μεταβλητή } \xi = \alpha x \text{ είναι αδιάστατη.}$$

Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται:

$$\begin{aligned} \Psi'' + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{mg}{\hbar^2} \frac{2}{x} \right) \Psi &= 0 \\ \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi}{dx} \right) &= \alpha \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\Psi}{d\xi} \right) = \alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \\ \Rightarrow \alpha^2 \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2} + \frac{2\alpha}{\xi} \right) \Psi &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(2\frac{mE}{\hbar^2\alpha^2} + \frac{2}{\xi} \right) \Psi &= 0 \\ \gamma^2 = \frac{2\hbar^2 |E|}{mg^2} &= \frac{2m |E|}{\hbar^2\alpha^2} \end{aligned}$$

$\frac{m|E|}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{m|E|}{\hbar^2} \frac{\hbar^4}{m^2 g^2} = \frac{\hbar^2 |E|}{mg^2} = \text{αδιάστατο.}$
Αρα η εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left(-\gamma^2 + \frac{2}{\xi} \right) \Psi = 0$$

Παίρνουμε πρώτα την ασυμπτωτική εξίσωση για $\xi \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \Psi'' - \gamma^2 \Psi = 0 \Rightarrow \Psi'' = \gamma^2 \Psi \Rightarrow \Psi(\xi) = e^{-\gamma\xi}$$

Για κάθε ξ έχουμε την λύση

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= e^{-\gamma\xi} F(\xi) \\ \frac{d\Psi}{d\xi} &= -\gamma e^{-\gamma\xi} F(\xi) + e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} \\ \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} &= \gamma^2 e^{-\gamma\xi} F(\xi) - \gamma e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} - \gamma e^{-\gamma\xi} \frac{dF}{d\xi} + e^{-\gamma\xi} \frac{d^2F}{d\xi^2} \\ \frac{d^2\Psi}{d\xi^2} &= \left(\gamma^2 F - 2\gamma \frac{dF}{d\xi} + \frac{d^2F}{d\xi^2} \right) e^{-\gamma\xi} \end{aligned}$$

Η εξίσωση του Schrödinger ξανά:

$$(\gamma^2 F - 2\gamma F' + F'') - \gamma^2 F + \frac{2F}{\xi} = 0$$

$$F'' - 2\gamma F' + \frac{2}{\xi} F = 0$$

Λύση με σειρά:

$$F(\xi) = \xi \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \xi^k$$

$$\Rightarrow F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^k$$

όπου ξεκινάμε με τον γραμμικό όρο διότι θέλουμε $F(\xi = 0) = 0$. Έτσι

$$F' = \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \xi^{k-1}, \quad \frac{F}{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{k-1}$$

$$F'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \beta_k \xi^{k-2}$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \beta_k \xi^{k-2} - 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k \xi^{k-1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^{k-1} = 0$$

Αναδιατάσουμε τις σειρές για να έχουμε ίδιες δυνάμεις

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+2)(l+1) \beta_{l+2} \xi^l - 2\gamma \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \beta_{l+1} \xi^l + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{l+1} \xi^l = 0$$

όπου για την πρώτη σειρά έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό $k = l+2, l = 0 \mapsto k = 2$, για την δεύτερη σειρά $k = l+1, l = 0 \mapsto k = 1$ και για την τρίτη $k = l+1, l = 0 \mapsto k = 1$.

Κρατάμε τους ομοβάθμιους όρους:

$$(l+2)(l+1) \beta_{l+2} - 2\gamma(l+1) \beta_{l+1} + 2\beta_{l+1} = 0$$

$$\beta_{l+2} = \frac{2\gamma(l+1) - 2}{(l+2)(l+1)} \beta_{l+1}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

Ορίζοντας $k = l+1$ έχουμε

$$\beta_{k+1} = 2 \frac{\gamma k - 1}{(k+1)k} \beta_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Η σειρά τερματίζεται εάν $\gamma = \frac{1}{n}$, $n =$ ακέραιος και για κάθε n η λύση είναι πολυώνυμο βαθμού n .

Ενέργειες:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{2\hbar^2 |E|}{mg^2}$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{mg^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Άσκηση 8.

Πρώτον, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του x^2 :

$$V(x) = \left(1 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2 x^4}{2} + \frac{\lambda^3 x^6}{3!} + \dots \right) V_0$$

Δεύτερον, κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους λύνουμε την εξίσωση του Schrödinger για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + V_0 \lambda x^2 \Psi = (E_n - V_0) \Psi$$

$$V_0 \lambda = \frac{1}{2} m \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2V_0 \lambda}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \sqrt{\lambda}$$

Οι λύσεις είναι:

$$E_n^{(0)} - V_0 = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n^{(0)} = V_0 + \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

και ιδιοσυναρτήσεις Ψ_n αυτές του αρμονικού ταλαντωτή.

Τρίτον, αντιμετωπίζουμε τον όρο $V(x) = \frac{\lambda^2}{2} x^4 V_0$ σαν διαταραχή και υπολογίζουμε τις διορθώσεις στην ενέργεια E_n .

Εφαρμόζουμε λοιπόν πρώτης τάξης θεωρία διαταραχών:

$$\begin{aligned}
 W_n &= \langle \Psi_n | V(x) | \Psi_n \rangle = V_{nn} \\
 V_{nn} &= \langle \Psi_n | V_0 \frac{\lambda^2}{2} x^4 | \Psi_n \rangle = \frac{V_0}{2} \lambda^2 \langle \Psi_n | x^4 | \Psi_n \rangle \\
 \langle \Psi_n | x^4 | \Psi_n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n x^4 \Psi_n dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \Psi_n)(x^2 \Psi_n) dx \\
 x^2 |n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\sqrt{n(n-1)} \Psi_{n-2} + (2n+1) \Psi_n + \sqrt{(n+1)(n+2)} \Psi_{n+2} \right) \\
 \langle n | x^4 | n \rangle &= \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} (n(n-1) + (2n+1) + (n+1)(n+2)) \\
 \langle n | x^4 | n \rangle &= \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} (2(n^2 + 2n + 2)) \\
 W_n &= V_{nn} = \frac{V_0}{2} \lambda^2 \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} 2(n^2 + 2n + 2) \\
 V_{nn} &= \frac{\lambda\hbar^2}{8m} (n^2 + 2n + 2)
 \end{aligned}$$

$$E_n = E_n^{(0)} + V_{nn} = V_0 + \sqrt{2V_0} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \hbar + \frac{1}{8} (n^2 + 2n + 2) \left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}} \hbar \right)^2$$

Για μικρό n η διόρθωση πάει με τις δυνάμεις του $\hbar \sqrt{\frac{\lambda}{m}} < \sqrt{V_0}$ όπως υποθέτουμε. Για μεγάλα n πάει με το n^2 και γίνεται αναξιόπιστη η προσέγγιση. ■

Ασκηση 9.

α)

$$c = 0 :$$

$$\Psi_n(x, y) = \Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}(y)$$

$$E_n = E_{n_1} + E_{n_2}$$

$$- \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{n_i}}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Psi_{n_i} = E_{n_i} \Psi_{n_i}, \quad i = 1, 2$$

$$E_{n_1} = \hbar\omega \left(n_1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_{n_2} = \hbar\omega \left(n_2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) = \hbar\omega(n + 1)$$

$$n = n_1 + n_2, \quad n_1 = 0, 1, 2, \dots, \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow n = 0, 1, 2, \dots$$

Για την ενέργεια $E_0 = \hbar\omega$ έχουμε μόνο μια ιδιοσυνάρτηση, την $\Psi_0(x, y) = \Psi_0(x)\Psi_0(y)$. Για την ενέργεια $E_1 = 2\hbar\omega$ έχουμε δύο ιδιοσυναρτήσεις, τις

$$\begin{cases} \Psi_{10}(x, y) = \Psi_1(x)\Psi_0(y) = \Phi_1 \\ \Psi_{01}(x, y) = \Psi_0(x)\Psi_1(y) = \Phi_2 \end{cases}$$

δηλαδή έχουμε εκφυλισμό.

Για ορισμένο n με ενέργεια $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1)$ το n_1 μπορεί να πάρει τις τιμές $n_1 = 0, 1, 2, \dots, n$ και το $n_2 = n, n - 1, n - 2, \dots, 0$ αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε $n + 1$ διαφορετικές καταστάσεις με την ίδια ενέργεια. ■

β) Ιδιοτιμές της ενέργειας για $c \neq 0$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \langle \Phi_1 | V | \Phi_1 \rangle = \int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)cxy\Psi_1(x)\Psi_2(y)dxdy = \\ &c \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(x)x\Psi_1(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^*(y)y\Psi_0(y)dy \\ V_{11} &= 0, \quad V_{22} = 0 \\ V_{12} &= \langle \Phi_1 | V | \Phi_2 \rangle = c \int \Psi_1^*(x)\Psi_0^*(y)xy\Psi_0(x)\Psi_1(y)dxdy = \\ &= c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1 x \Psi_0 dx \right)^2 = c \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Psi_1(x) dx \right)^2 = \\ &= c \frac{\hbar}{2m\omega} = V_{21} \\ x\Psi_0(x) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2\hbar\omega - E_1 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 2\hbar\omega - E_1 \end{pmatrix} = 0 \\ (2\hbar\omega - E_1)^2 - \frac{c^2\hbar^2}{4m^2\omega^2} &= 0 \Rightarrow \left(2\hbar\omega - E_1 - \frac{c\hbar}{2m\omega} \right) \left(2\hbar\omega - E_1 + \frac{c\hbar}{2m\omega} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} E_1^{(+)} = 2\hbar\omega + \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ E_1^{(-)} = 2\hbar\omega - \frac{c\hbar}{2m\omega} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(+)} &= c_1^{(+)}\Phi_1 + c_2^{(+)}\Phi_2, \quad E_1^{(+)} = E_1^{(0)} + W \\ \Phi^{(-)} &= c_1^{(-)}\Phi_1 + c_2^{(-)}\Phi_2, \quad E_1^{(-)} = E_1^{(0)} - W \end{aligned}$$

$$E_1^{(0)} = 2\hbar\omega \text{ και } W = \frac{c\hbar}{2m\omega}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} c_1^{(+)} \\ c_2^{(+)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{c\hbar}{2m\omega} c_2^{(+)} = \frac{c\hbar}{2m\omega} c_1^{(+)} \Rightarrow c_1^{(+)} = c_2^{(+)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c\hbar}{2m\omega} \\ \frac{c\hbar}{2m\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix} = -W \begin{pmatrix} c_1^{(-)} \\ c_2^{(-)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1^{(-)} = -c_2^{(-)}$$

Και με κανονικοποίηση $|c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, έτσι

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \Phi_2) & \text{Συμμετρική Λύση} \\ \Phi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - \Phi_2) & \text{Αντισυμμετρική Λύση} \end{cases}$$

■

$\gamma)$

$$\begin{aligned} xy &= (v+z)(v-z) = v^2 - z^2 \\ x^2 + y^2 &= v^2 + z^2 + 2vz + v^2 + z^2 - 2vz = 2v^2 + 2z^2 \\ \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + cxy &= m\omega^2v^2 + m\omega^2z^2 + cv^2 - cz^2 = \\ &= (m\omega^2 + c)v^2 + (m\omega^2 - c)z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(x+y), \quad z = \frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial v}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial v} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial v}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial v} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial v\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

H εξίσωση του Schrödinger στις νέες μεταβλητές είναι

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + (m\omega^2 + c)v^2 + (m\omega^2 - c)z^2$$

όπου $m\omega^2 - c > 0$.

Ξαναορίζοντας τις μεταβλητές

$$v \rightarrow \sqrt{2}v = w, \quad z \rightarrow \sqrt{2}z = u$$

η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{2}(m\omega^2 + c)w^2 + \frac{1}{2}(m\omega^2 - c)u^2$$

με ιδιοτιμές της ενέργειας:

$$\begin{cases} E_{n_1} = \hbar\omega_1 \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \\ E_{n_2} = \hbar\omega_2 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} m\omega_1^2 &= m\omega^2 + c \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{c}{m}} \\ m\omega_2^2 &= m\omega^2 - c \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \frac{c}{m}} \end{aligned}$$

Τελικά οι κυματοσυναρτήσεις είναι:

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}(x, y) &= \Psi_{n_1}(w)\Psi_{n_2}(u) \\ \Psi_{n_1}(w) &= \left(\frac{\alpha_1}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2^{-n_1}}{n_1!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha_1 \frac{w^2}{2}} H_{n_1}(\sqrt{\alpha_1}w) \\ \alpha_1 &= \frac{m\omega_1}{\hbar} \\ \Psi_{n_2}(u) &= \left(\frac{\alpha_2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2^{-n_2}}{n_2!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha_2 \frac{u^2}{2}} H_{n_2}(\sqrt{\alpha_2}u) \\ \alpha_2 &= \frac{m\omega_2}{\hbar} \end{aligned}$$

με ολική ενέργεια $E_{n_1, n_2} = E_{n_1} + E_{n_2}$

■

'Ασκηση 10.

Πρώτον Υποθέτω ότι λύνω την αδιατάραχτη Χαμιλτονιανή H_0 και έχω τα E_0 και $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$.

Δεύτερον διαγωνοποιώ τον πίνακα $V_{k\lambda}$ της διαταραχής και βρίσκω τις δυο ιδιοτιμές της ενέργειας

$$E_1 = E_0 + E^{(1)}, \quad E_2 = E_0 + E^{(2)}$$

Τρίτον βρίσκω για κάθε ιδιοτιμή E_1, E_2 τα ιδιοδιανύσματα Ψ_k με $k = 1, 2$

$$(H_0 + V)\Psi_k = E_k\Psi_k$$

$$H_0\Psi_k^{(0)} = E_0\Psi_k^{(0)}$$

$$\Psi_1 = c_{11}\Psi_1^{(0)} + c_{12}\Psi_2^{(0)}$$

$$\Psi_2 = c_{21}\Psi_1^{(0)} + c_{22}\Psi_2^{(0)}$$

Τέταρτον λύνω ως προς $\Psi_1^{(0)}$

$$\Psi_1^{(0)} = \frac{c_{22}\Psi_1 - c_{12}\Psi_2}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Psi(t=0) = \Psi_1^{(0)}, \quad \Psi(t) = \frac{c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left(c_{22}\Psi_1 e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}\Psi_2 e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right)$$

αντικαθιστώντας όπου Ψ_1, Ψ_2 τις εκφράσεις τους ως προς $\Psi_1^{(0)}, \Psi_2^{(0)}$ έχουμε

$$\Psi(t) = \frac{e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \left[\Psi_1^{(0)} \left(c_{11}c_{22}e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - c_{12}c_{21}e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) + \Psi_2^{(0)} c_{12}c_{22} \left(e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \right]$$

Επιβεβαίωση:

$$t=0 \Rightarrow \Psi(t=0) = \frac{1}{\det |c|} \Psi_1^{(0)} \det |c| = \Psi_1^{(0)}$$

$$\text{Πιθανότητα μετάβασης στην } \Psi_2^{(0)} \text{ σε χρόνο } (t) = \left| \langle \Psi_2^{(0)} | \Psi(t) \rangle \right|^2 =$$

$$= \frac{(c_{12}c_{22})^*(c_{12}c_{22})}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left(e^{i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) \left(e^{-i\frac{E^{(1)} t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E^{(2)} t}{\hbar}} \right) =$$

$$= \frac{|c_{12}|^2 |c_{22}|^2}{|c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}|^2} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{E^{(1)} - E^{(2)}}{\hbar} t \right) \right)$$

Ασκηση 11.

Το δυναμικό που προστίθεται στο σύστημα είναι της μορφής $V(x, t) = -q\mathcal{E}(t)x$. Άρα το πλάτος πιθανότητας $\alpha_{n \rightarrow m}$ σε πρώτης τάξης διαταραχτική προσέγγιση είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_m(t) &= \alpha_{n \rightarrow m}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{mn}(t') e^{iW_{mn}t'} dt' \\ W_{mn} &= \frac{1}{\hbar}(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) = \frac{1}{\hbar}\hbar\omega \left(m + \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \\ W_{mn} &= \omega(m - n)\end{aligned}$$

$$V_{mn}(t) = -q\mathcal{E}(t)\langle m|x|n \rangle = -qe^{-\lambda t^2}\langle m|x|n \rangle$$

για τον αρμονικό ταλαντωτή έχουμε:

$$x\Psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\Psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\Psi_{n+1})$$

άρα

$$\begin{aligned}m &= \begin{cases} n-1 \\ n+1 \end{cases} \\ \Rightarrow \langle m|x|n \rangle &= \begin{cases} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, & m = n-1 \\ \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, & m = n+1 \end{cases}\end{aligned}$$

Εάν πάρουμε $t \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha_{n \rightarrow n+1} &= \frac{iq}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{i\omega t} dt \\ \alpha_{n \rightarrow n-1} &= \frac{iq}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{-i\omega t} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2} e^{i\omega t} dt &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda}}\end{aligned}$$

και Πλάτος μετάβασης = $|\alpha_m|^2$

■

Ασκηση 12.

Ολική δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - Fx \\ V(x) &= \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 + V_0 \\ x_0 &= \frac{F}{m\omega^2}, \quad V_0 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{m\omega^2} \end{aligned}$$

ορίζουμε $y = x - x_0$

άρα οι κυματοσυναρτήσεις του διαταραγμένου συστήματος είναι

$$\Psi_k(y) = \Psi_k(x - x_0)$$

με Ψ_k τις λύσεις του ταλαντωτή, $\Psi_k(x) = c_k H_k(\sqrt{a}x)e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $a = \frac{m\omega}{\hbar}$.

Άρα το πλάτος μετάβασης είναι:

$$\alpha_{0 \rightarrow k} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x)\Psi_k(x - x_0)dx$$

κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής

$$\begin{aligned} y &= x - x_0, \quad dy = dx, \quad x = y + x_0 \\ \alpha_{0 \rightarrow k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(y + x_0)\Psi_k(y)dy = \\ &= c_0 c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\frac{(y+x_0)^2}{2}} e^{-a\frac{y^2}{2}} H_k(\sqrt{a}y)dy = \\ &= c_0 c_k e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_0y} e^{-ay^2} H_k(\sqrt{a}y)dy = \\ &= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}x_0\xi} e^{-\xi^2} H_k(\xi)d\xi = \\ &= \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-a\frac{x_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\sqrt{a}x_0\xi} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2} d\xi \\ \xi &= \sqrt{a}y, \quad \xi_0 = \sqrt{a}x_0, \quad H_k(\xi) = (-1)^k e^{\xi^2} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2} \end{aligned}$$

$$\alpha_{0 \rightarrow k} = (-1)^k \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_0\xi} \frac{d^k}{d\xi^k} e^{-\xi^2} d\xi$$

Το ολοκλήρωμα επιλύεται κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη k φορές.

$$c_0 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad c_k = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} \Rightarrow \frac{c_0 c_k}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^k k!}}$$

Κβαντομηχανική II, ΣΕΜΦΕ

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1.

Ένα σωματίδιο μάζας M είναι αναγκασμένο να κινείται στην επιφάνεια μιάς σφαίρας ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

Ασκηση 2.

Ένα σωματίδιο μάζας M κινείται επάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

Ασκηση 3.

Να δείξετε ότι σε μία κατάσταση με καθορισμένη τιμή του L_z οι μέσες τιμές των L_x και L_y είναι ίσες με το μηδέν.

Ασκηση 4.

Ένα σωματίδιο μάζας M κινείται υπό την επίδραση του κεντρικού δυναμικού $V(r)$ όπου:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & , r > \alpha \\ 0 & , r < \alpha \end{cases}$$

Δηλαδή βρίσκεται μέσα σε ένα σφαιρικό πηγάδι δυναμικού.

- Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ζεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.
- Υπολογίστε τις ενεργειακές ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του σωματιδίου για στροφορμή $l = 0$.

Ασκηση 5.

Εάν \vec{A} και \vec{B} είναι δυο τυχόντα διανύσματα και σ_k οι πίνακες του Pauli, αποδείξτε την σχέση: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Ασκηση 6.

Εάν J_x , J_y και J_z είναι οι τελεστές που παριστάνουν τις τρείς συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής.

- Υπολογίστε τον τελεστή $A = e^{i\gamma J_y} J_z e^{-i\gamma J_y}$ όπου γ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Τυπόδειξη: υπολογίστε το $\frac{dA}{d\gamma}$ και $\frac{d^2 A}{d\gamma^2}$.
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $e^{-i(\frac{\pi}{2h})J_y} Y_{jm}$ είναι ιδιοσυνάρτηση των \vec{J}^2 και J_x .

Άσκηση 7.

- α) Βρείτε τον πίνακα που παριστάνει την προβολή του διανύσματος του spin σε μια τυχούσα κατεύθυνση (θ, ϕ) .
- β) Δείξτε ότι έχει ιδιοτιμές $\pm \frac{\hbar}{2}$
- γ) Βρείτε το διάνυσμα \mathcal{X} που περιγράφει μία κατάσταση με καθορισμένη προβολή του spin σε αυτή την διεύθυνση.

Άσκηση 8.

Ένα σωματίδιο έχει καθορισμένη τιμή του spin κατά τον άξονα z ίση με $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$.

- α) Υπολογίστε την μέση τιμή της συνιστώσας του spin στην κατεύθυνση \vec{n} που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα z .
- β) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε σε μία μέτρηση της προβολής του spin κατά τον άξονα \vec{n} την τιμή $\left(\frac{\hbar}{2}\right)$ ή $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 9.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $F(r, \theta, \phi)$ η οποία μετατίθεται με τους τρεις τελεστές της στροφορμής, είναι συνάρτηση μόνο του r .
- β) Εάν η συνάρτηση $F(x, y, z)$ μετατίθεται με μόνο έναν από τους τελεστές L_x , L_y ή L_z , τότε αυτή πρέπει να παρουσιάζει αξονική συμμετρία γύρω από τον αντίστοιχο άξονα συντεταγμένων.

Άσκηση 10.

- α) Να δράσετε στην ιδιοσυνάρτηση Y_{22} με τον τελεστή L_- και να προσδιορίσετε τις Y_{21} και Y_{20} . Να κάνετε την κανονικοποίηση.
- β) Προσδιορίστε επίσης τις $Y_{2,-1}$ και Y_{20} δρώντας στην $Y_{2,-2}$ με τον L_+ .

Άσκηση 11.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\Psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$ μπορεί να θεωρηθεί κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(r) = \frac{\gamma}{r}$, όπου γ σταθερά, και ορισμένη στροφορμή.

Να υπολογίσετε:

- α) Τον κβαντικό αριθμό l της στροφορμής του συστήματος.
- β) Την ενέργεια E του συστήματος.
- γ) Την σταθερά γ .

Άσκηση 12.

Η κυματοσυνάρτηση ενός ατόμου του υδρογόνου την χρονική στιγμή $t = 0$ δίνεται από την σχέση $\Psi(\vec{r}, 0) = 2c\Psi_{211}(r, \theta, \phi) + c\Psi_{32,-1}(r, \theta, \phi)$

όπου οι κυματοσυναρτήσεις $\Psi_{211}(r, \theta, \phi)$ και $\Psi_{32,-1}(r, \theta, \phi)$ είναι κανονικοποιημένες.

Να υπολογίσετε την τυχαία χρονική στιγμή t

- α) Την κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση του ατόμου.
- β) Τις δυνατές τιμές της z συνιστώσας της στροφορμής.
- γ) Την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της στροφορμής.

(1)

Kλαρογυμναστική ΙΙ. ΣΕΜΙΦΕ

Άδειας Τετράπτυχης Σεπάς ποντίσεων, Συγκρίψεων.

Άσκηση 9:

(a) Η συνάρτηση $F = F(r, \theta, \varphi)$ μετατίθεται με τις ίδιες τιγρέες L_x, L_y και L_z της σφαιρικής σύστασης.

$$[L_k, F]Y = 0 \quad \text{για κάθε συνάρτηση } Y$$

$$\Rightarrow L_k(FY) - F(L_k Y) = (L_k F)Y + F(L_k Y) - FL_k Y = \\ = (L_k F)Y = 0 \quad \Rightarrow L_k F = 0 \quad \forall k=1,2,3$$

$$L_1 = L_x, \quad L_2 = L_y, \quad L_3 = L_z$$

Οι τιγρέες L_k είναι γραμμικοί και έχουν προστίθιμα ως προς θ, φ πότε πρέπει να είναι ταξιδιώτικοι.

$$\Rightarrow L_2 F = 0 \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow F = F(r, \theta) \quad \text{πότε}$$

$$L_x F = 0 \Rightarrow -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) F(r, \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = F(r) .$$

Δεύτερη ανάλυση: $L_k F = 0 \quad \forall k \Rightarrow \vec{L}^2 F = 0$

Τια συνδρόμων η συνάρτηση $F(r, \theta, \varphi)$ ανατίθεται σε συρά ως προς τις σφαιρικές συναρτήσεις $\chi_{\theta, \varphi}(r, \theta, \varphi)$

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}^2 F = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} \hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^{(r)} l(l+1) t_l^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

Οι συναρτήσεις Y_{lm} είναι αρθρώσις μερικής των και γραμμής αντισπείρων

$$\Rightarrow B_{lm} = 0 \text{ οταν } l \geq 1, m.$$

$$\Rightarrow F(r, \theta, \varphi) = B_{00}(r) Y_{00}(\theta, \varphi), \quad Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

$$(b) \text{ Επειδή } L_x \hat{F}(r) = 0$$

Σημείωση: Η περιοχή της οποίας συγχέονται
τα \hat{L}^2 και L_x , $[\hat{L}^2, L_x] = 0$, με κυριοτέρων

τις $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ δην ταύτα των φυσικών λόγω των περιάν από ταν άξονα του x και των αξιονοτερικών φυσικών των ενισχύοντας (x, z). Σημείωση: Ταύτα πέρα από ταν άξονα x :

$$\Rightarrow L_x = -i\hbar \frac{d}{d\varphi}. \quad L_x F = 0 \Rightarrow \frac{dF}{d\varphi} = 0$$

Σημείωση: Η συνάρτηση F δεν εξαρτίζεται από την αξιονοτερική φυσική της πέρα από ταν άξονα του x .
 \Rightarrow Εξαρτήσεις αξιονοτερικής συγένετης της πέρα από ταν άξονα x .

(3)

A known 10^{th} :

$$(\text{a}) \quad V_{22} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} = A_{22} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_z = L_x \pm i L_y = \pm \hbar e^{\mp i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\text{Then } L_z V_{em} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m\pm 1)} V_{e, m\pm 1}$$

$$L_z V_{22} = \hbar \sqrt{2} V_{22}$$

$$L_z V_{22} = -\hbar \bar{e}^{-i\varphi} \left(\frac{\partial V_{22}}{\partial \theta} - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial V_{22}}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -\hbar \bar{e}^{-i\varphi} A_{22} \left[2 \sin \theta \cos \theta - i(2i) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin^2 \theta \right] e^{2i\varphi}$$

$$= -\hbar \bar{e}^{-i\varphi} A_{22} \sin 2\theta \cos \theta e^{i\varphi} = 2\hbar V_{21}$$

$$\Rightarrow V_{21} = -2A_{22} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}.$$

$$L_z V_{21} = \hbar \sqrt{6} V_{20}$$

$$L_z V_{21} = -\hbar \bar{e}^{-i\varphi} \left(\frac{\partial V_{21}}{\partial \theta} - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial V_{21}}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -\hbar \bar{e}^{-i\varphi} A_{21} \left[\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta (i) \right] e^{i\varphi}$$

(4)

$$L - V_{21} = -t_h A_{21} (3 \cos^2 \theta - 1) = t_h \sqrt{6} V_{20}$$

$$\Rightarrow V_{20} = -\frac{A_{21}}{\sqrt{6}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{76\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

(b) ημερια διπλωματικων μετρων L+ οντων

$$V_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\varphi} \rightarrow V_{2,-1} και V_{20}.$$

Άσκηση 11 για:

$$U(r) = cr e^{-\frac{r}{2a}} \cos \vartheta, \quad V(r) = \frac{\delta}{r}$$

(a) Σχετίζομε την με τις συνήθιστες;

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 U(r) &= -t_h^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right\} \\ &= -t_h^2 cr e^{-\frac{r}{2a}} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta) (-1) \right\} \end{aligned}$$

$$= t_h^2 cr e^{-\frac{r}{2a}} \frac{2}{\sin \theta} \sin \theta \cos \vartheta = 2t_h^2 c \vartheta \rightarrow \ell = 1.$$

$$\vec{L}^2 U = t_h^2 e(i\ell + 1) \vartheta U.$$

$$(b) + (c) \quad -\frac{t_h^2}{2m} \vec{D}^2 U + V(r) U = E U \quad (r, \theta, \varphi).$$

$$-t_h^2 \vec{D}^2 U = -\frac{t_h^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + \frac{\vec{L}^2 U}{r^2}$$

(5)

Apa n egiowon raw Schroedinger jherca:

$$-\frac{\hbar^2}{2m\text{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{r}^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{2\hbar^2 k}{2m\text{r}^2} + \frac{\delta \psi}{\text{r}} = E \psi$$

Karayue tis napay wj'locas:

$$\frac{1}{\text{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{r}^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \cos \theta \left\{ \frac{e^{-\frac{\text{r}}{2a}}}{\text{r}} - \frac{4}{2a} e^{\frac{\text{r}}{2a}} + \frac{\text{r}}{4a^2} e^{\frac{\text{r}}{2a}} \right\}$$

$$= \frac{2}{\text{r}^2} \psi - \frac{2}{\text{r}a} \psi + \frac{1}{4a^2} \psi$$

$$\Rightarrow -\frac{2\hbar^2}{2m\text{r}^2} \psi + \frac{2\hbar^2}{2ma^2} \psi = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \psi + \frac{2\hbar^2 \psi}{2m\text{r}^2} + \frac{\delta \psi}{\text{r}} = \\ = E \psi$$

Egiowvorcas opolans opas exoupe:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = -\frac{\hbar^2}{8ma^2} \quad (\text{zagns } \text{r}^0 = 1) \\ \text{r} = -\frac{\hbar^2}{ma} \quad (\text{zagns } \frac{1}{\text{r}}) \end{array} \right.$$

Aokuon 12 ≡ :

$$\psi_{(\text{r}, \theta)} = c_1 \psi_{111}(\text{r}, \theta, \varphi) + c_2 \psi_{32,-1}(\text{r}, \theta, \varphi)$$

Jherka oxien $\psi_{\text{hem}} = R(\text{r}) Y_{\text{hem}}(\theta, \varphi)$ kon

$$H \psi_{\text{hem}} = E \psi_{\text{hem}}$$

(6)

(a) kovariacionen

$$\int \Psi_{(z)}^* \Psi_{(r)} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \int \Psi_{(z)}^* \Psi_{(r)} dx &= 4|c|^2 \int \Psi_{211}^* \Psi_{211} dx + |c|^2 \int \Psi_{32,-1}^* \Psi_{32,-1} dx \\ &\quad + 2|c|^2 \int \Psi_{211}^* \Psi_{22,-1} dx + 2|c|^2 \int \Psi_{32,-1}^* \Psi_{222} dx \\ &= 4|c|^2 + |c|^2 + 0 + 0 = 5|c|^2 \\ \Rightarrow |c|^2 &= \frac{1}{5} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

$$\Psi_{(z,t)} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} \Psi_{32,-1} .$$

$$(6) \quad \hat{L}_z \Psi_{\text{num}} = \text{Re} \hat{L}_z \chi_{\text{num}} = m \text{Re} \Psi_{\text{num}}$$

\rightarrow Surarzes typas tarp \hat{L}_z ir $z_0 (+1)$ bei $z_0 (-1)$.

$$(7) \quad \langle \hat{L}^2 \rangle = \int \Psi_{(t)}^* \hat{L}^2 \Psi_{(t)} dx$$

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \Psi_{(t)} &= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} \hat{L}^2 \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} \hat{L}^2 \Psi_{32,-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_2 t}{\hbar}} (2t^2) \Psi_{211} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \frac{E_3 t}{\hbar}} (6t^2) \Psi_{32,-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \hat{L}^2 \rangle = (2t^2) \frac{4}{5} + (6t^2) \frac{1}{5} = \frac{14}{5} t^2 .$$

$$\hat{L}^2 \Psi_{\text{num}} = \text{Re} \hat{L}^2 \chi_{\text{num}} = t^2 \ell(\ell+1) \Psi_{\text{num}} .$$