

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διδάσκοντες: I. Κολέτσος & Γ. Παπαγεωργίου

24-06-2009

Θέμα 1. a) Να περιγράψετε την Γενική Επαναληπτική μέθοδο για την επίλυση ενός ομαλού $n \times n$ γραμμικού συστήματος $Ax = b$. Εν συνεχείᾳ να δειχθεί ότι η μέθοδος συγκλίνει αν $\|B\| < 1$, για κάποια φυσική νόρμα πίνακα, όπου B ο πίνακας των επαναλήψεων της μεθόδου.

b) Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Να υπολογιστούν οι επαναληπτικοί πίνακες B_J και B_{G-S} των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel αντίστοιχα, και στην συνέχεια με βάση αυτούς, να εξετάσετε αν οι αντίστοιχες επαναληπτικές μέθοδοι συγκλίνουν.

Θέμα 2. Δίνεται ο πίνακας:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να παραγοντοποιηθεί στην μορφή $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, εφαρμόζοντας την μέθοδο Gauss χωρίς οδήγηση. Εν συνεχείᾳ να επιλυθεί το σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{b} = (14, 12, 6)^T$ με βάση την προηγούμενη παραγοντοποίηση.

Θέμα 3. a) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \cos(\pi x / 2)$. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που παρεμβάλει την συνάρτηση στα σημεία $x_0 = 0, x_1 = 1$. Να βρεθεί επίσης μία εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής της μορφής: $|f(x) - p(x)| \leq M, \forall x \in [0, 1]$, εφαρμόζοντας τον παρακάτω τύπο σφάλματος της παρεμβολής Lagrange.

$$\left\{ f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\}.$$

b) Δίνονται τα δεδομένα:

x_i	1.0	1.5	2.0	3.0
$f_i = f(x_i)$	1.0	2.0	21.0	400.0

Να υπολογιστεί με το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων η βέλτιστη καμπύλη της μορφής $y(x) = be^{ax}$ η οποία προσεγγίζει τα δεδομένα του πίνακα. (Για ευκολία θεωρείστε το μοντέλο που προκύπτει αν λογαριθμίσετε την προηγούμενη συνάρτηση).

Θέμα 4. a) Ο απλός τύπος του Τραπεζίου με όρο σφάλματος για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I = \int_a^b f(x)dx$, δίνεται από τον τύπο:

$$I = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Με βάση αυτόν να υπολογιστεί ο αντίστοιχος σύνθετος με όρο σφάλματος για N υποδιαστήματα.

b) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = -x y, \quad y(0) = 2.$$

Να εφαρμοστεί η μέθοδος Taylor 2nd τάξης για την προσέγγιση της λύσης στο σημείο $x = 0.2$ με βήμα $h = 0.1$. Οι πράξεις να γίνουν με 4 δεκαδικά ψηφία.

Θέμα 5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x = g(x)$, όπου $g(x) = \frac{1}{2} e^{x/2}$, έχει μοναδική λύση ξ στο διάστημα $[0, 1]$, και ότι η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = g(x_n)$ συγκλίνει στο ξ $\forall x_0 \in [0, 1]$. Να γίνουν τρεις επαναλήψεις με $x_0 = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

⊕ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.45 ΩΡΕΣ ⊕