

Θέματα εξετάσεων Ατομικής Μοριακής Φυσικής, Σεπτέμβριος 2007
 Διδάσκων, Ε. Φωκίτης (γράψετε ως 4 από τα 5 θέματα).

Διαρκει 2 1/2 ώρει
 κλειστα βιβλια 4 σημειωσει

Θέμα 1 (25 μον.)

A) Εξηγήστε το φαινόμενο λεπτής υφής στο άτομο του Νατρίου ή σε άλλο άτομο με σθένος +1 (Μη γράψετε περισσότερες από 4-5 σειρές).

B) Για δεδομένες τιμές των κβαντικών αριθμών l και s υπολογίστε : α) Τις επιτρεπόμενες τιμές του εσωτερικού γινομένου $l \cdot s$, β) τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων l και s στις καταστάσεις $2p_{1/2}$ και $2p_{3/2}$ του ατόμου του υδρογόνου.

Θέμα 2 (25 μον.)

Αρναυ

Δύο ταυτόσημα μη αλληλεπιδρώντα φερμιόνια με σπιν $1/2$ συγκατοικούν σε ένα μονοδιάστατο κουτί δυναμικού μήκους L . Γράψετε τη χωρική κυματοσυνάρτηση του συστήματος αν τα σωματίδια βρίσκονται στην κατάσταση ελάχιστης ολικής ενέργειας του συστήματος, λαβαίνοντας υπόψη και την ύπαρξη των σπιν.

Αρχι Pauli

(Σημείωση: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$, $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$)

Θέμα 3 (25 μον.)

(α) Εστω ένα άτομο που βρίσκεται σε ένα μαγνητικό πεδίο εντάσεως B και ένα ηλεκτρόνιο με μαγνητική ροπή $\mu = (-e/(2m_e c))\hbar l$, όπου l η τροχιακή στροφορμή του. Υποθέτοντας ότι το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς τον άξονα των z , να δείξετε πως η ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής που προκύπτει αν θεωρηθεί ως διαταραχή η δυναμική ενέργεια λόγω του μαγνητικού πεδίου είναι

$$E'_{nlm} = E_{nl} + \frac{eB}{2m_e c} \hbar m = E_{nl} + \mu_B B m$$

όπου E_{nl} είναι η ενέργεια της κατάστασης (που παρουσιάζει εκφυλισμό) πριν εφαρμοστεί το μαγνητικό πεδίο.

Θέμα 4 (30 μον.)

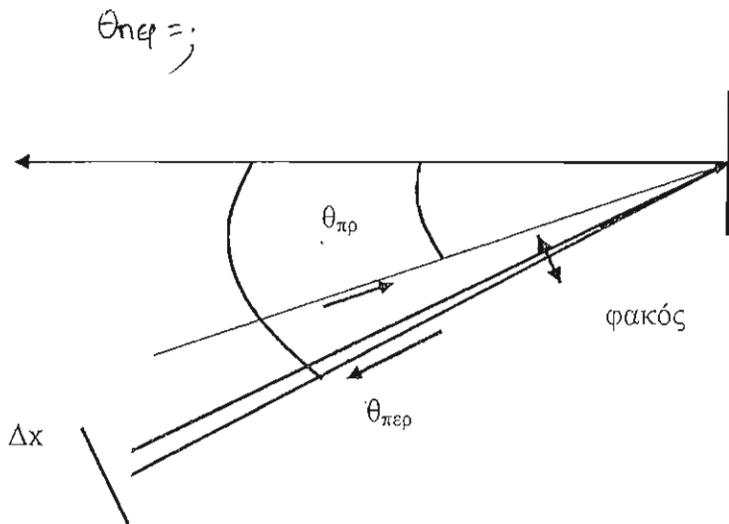
Θεωρείστε φασματόμετρο με φακούς εστιακής απόστασης $f=2.5$ m, που επιδιώκει να μετρήσει τη δομή της διάσπασης μιάς φασματικής γραμμής λόγω του Φαινομένου Zeeman, μία φασματική γραμμή του υδραργύρου.

(α) Εξηγήστε τη δομή των φασματικών γραμμών για $l=1$ και $l=2$, καθώς και σημειώστε σε κατάλληλο διάγραμμα τις επιτρεπόμενες λόγω κανόνων επιλογής μεταβάσεις.

(β) Βρείτε τις διαφορές μηκών κύματος κατά μεταβάσεις ($n=N+1, l=2$) \rightarrow ($n=N, l=1$), αν $B=0.5$ Tesla σε σύγκριση με την μετάβαση (N ακέραιος και μεγαλύτερος του 1) ($n=N+1, l=2, m=0$) \rightarrow ($n=N, l=1, m=0$) που είναι δεδομένο ότι δίνει μήκος κύματος $\lambda=546$ nm.

(γ) Βρείτε για ένα οπτικό φράγμα ανάκλασης με 2400 χαραγές ανά mm, με γωνία πρόσπτωσης $\theta_{\text{πρ}}=30^\circ$, την απόσταση Δx διαδοχικών γραμμών στις οποίες έχουμε

διάσπαση της γραμμής $\lambda = 546 \text{ nm}$, στο εστιακό επίπεδο του φακού που εστιάζει την περιθλώμενη δέσμη πρώτης τάξης. Είναι αυτή μετρήσιμη με τη βοήθεια φωτογραφικού φιλμ, ή άλλου ανιχνευτικού συστήματος; (υπόδ. : για το ερώτημα γ) μπορείτε πρώτα να βρείτε τη διαφορά γωνιών $\Delta\theta_{\text{περ}}$ μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών στις οποίες έχουμε διάσπαση λόγω Zeeman)



Θέμα 5 (25 μον.)

Υπέρλεπτη υφή στο άτομο υδρογόνου λόγω αλληλεπίδρασης πυρηνικού σπιν με σπιν ηλεκτρονίου. Θεωρήστε ότι η δυναμική αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-πρωτονίου έχει μεταβλητό όρο της μορφής:

$$V_{SI} = AS \cdot I \quad (1)$$

- Θεωρήστε την ολική στροφορμή $F=S+I$ και τα γνωστά περί αθροίσεως στροφορμών ώστε να βρείτε την υπέρλεπτη υφή της της στάθμης $1s$ του ηλεκτρονίου, λόγω της διαταραχής (1), συναρτήσει του A . *Παραβλέψτε το αποτέλεσμα!*
- Σχολιάστε το αποτέλεσμα με βάση τις γνώσεις σας για τις πληροφορίες που δίνει η μετάβαση ανάμεσα στις δύο στάθμες (γραμμή 21 cm) σχετικά με την κατανομή ατομικού υδρογόνου στο σύμπαν. *λέσβα δρασ*

(Υπόδ. $S \cdot I = \frac{1}{2}(F^2 - S^2 - I^2)$)

$E = hf$
 $c = \lambda f$

$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ erg}$
 $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$

$6,62 \cdot 10^{-34}$
 $\times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{sec}$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 5,8 \cdot 10^{-9} \text{ eV / tesla} = 0,93 \cdot 10^{-23} \text{ J / tesla}$ $1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,036}$, ακτιν. Bohr $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e c^2}$

πυρην. Μαγνητόνη $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3,152 \cdot 10^{-12} \text{ eV / gauss}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$

$(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}))\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$

$d(\sin \theta_{\pi\rho} + \sin \theta_{\pi\sigma}) = m\lambda$

$\vec{\mu} = \left(-\frac{e}{2m_p c} \right) \vec{l}$

Λύση Θέμα 1

(α) Δείτε θεωρία

(β) $(\vec{l} + \vec{s})^2 = \vec{s}^2 + \vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} \rightarrow$ και ως γνωστόν τα τρία μεγέθη j^2, l^2 και s^2 έχουν κοινό σύνολο ιδιοσυναρτήσεων. Έτσι, και ο τελεστής $l \cdot s$ δίνει ιδιοτιμές:

$$l \cdot s = \frac{1}{2} \hbar^2 \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{1} \right] \quad (1)$$

Έτσι, οι επιτρεπόμενες τιμές του γινομένου $l \cdot s$ καθορίζονται από τη σχέση (1) αν γνωρίζουμε τα j και l (αφού το s είναι ως γνωστό ίσο με $1/2$).

Για το $\cos \theta$ έχουμε

$$\cos \theta = \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{|\vec{l}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \quad (2)$$

Για την κατάσταση $2p_{3/2}$ έχουμε: ($l=1, s=1/2, j=3/2$) \rightarrow Η (2) δίνει $\cos \theta = 1/\sqrt{6}$ κλπ

Λύση Θέμα 2

Ως γνωστό οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις στην περίπτωση μονοδιάστατου κουτιού είναι

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 = n^2 E_1 \quad \text{ενώ η ιδιοσυνάρτηση για το ένα σωματίδιο είναι}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι εκείνη με σπιν αντίθετα στην $n=1$ και για τα 2 φερμιόνια, οπότε το χωρικό τμήμα της κυματοσυνάρτησης θα είναι συμμετρικό αφού η συνολική κυματοσυνάρτηση των σπιν είναι αντισυμμετρική, δηλ. η $X_{\uparrow\downarrow}$. Έτσι, η χωρική κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x_1}{L} \sin \frac{\pi x_2}{L}. \quad \text{Αυτή είναι προφανώς συμμετρική στην εναλλαγή των } x_1 \text{ και}$$

x_2 . Άρα, ικανοποιείται η αρχή του Pauli.

Λύση Θέμα 3

$$\text{Είναι } \vec{H}' = H - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = H - \mu_x B_x - \mu_y B_y - \mu_z B_z = H - 0 - 0 - \mu_z B$$

Ως γνωστόν είναι, στο ηλεκτρόνιο ενός ατόμου (σχέση μεταξύ τροχιακής στροφορμής και μαγνητικής ροπής):



και άρα,

$$H' = H + \frac{eB}{2m_e c} I_z$$

Τον δεύτερο όρο, τον θεωρούμε ως διαταραχή, και έτσι έχουμε:

$$(\text{αφού ως γνωστόν } I_z \psi_{nlm} = \hbar m \psi_{nlm})$$

$$H' \psi_{nlm} = (E_{nl} + \frac{eB}{2m_e c} \hbar m) \psi_{nlm}$$

Συνεπώς, οι νέες ιδιοτιμές με την διαταραχή του μαγν. Πεδίου είναι:

$$E'_{nlm} = E_{nl} + \mu_B B m$$

Λύση Θέμα 4

(β)

$$\Delta E = -\mu_B \cdot B m, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad \text{Για } m=1, \quad \Delta E = (5.79 \times 10^{-11} \text{ MeV/tesla}) \cdot (0.5 \text{ Tesla}) \\ = 1.73 \times 10^{-5} \text{ eV} \quad (1)$$

$$\text{Από την } \Delta E = \hbar \Delta \nu = \hbar \Delta \lambda / \lambda^2 \quad (2),$$

και με εφαρμογή των Εξ. (1) και (2) $\Delta \lambda \approx \dots \dots \dots$ κλπ

(γ)

$$d(\sin \theta_{\text{περ}} + \sin \theta_{\text{απερ}}) = m \lambda \quad (3)$$

, και με $m=1$ βρίσκουμε το $\sin \theta_{\text{περ}}$, αφού όλα τα άλλα είναι γνωστά ($d=1 \text{ mm}/2400$).

Στη συνέχεια διαφορίζουμε την (3), θεωρώντας το $\Delta \theta_{\text{περ}} \approx 0$. Έτσι, με γνωστό το $\Delta \lambda$ από το προηγούμενο ερώτημα, μπορούμε να προσδιορίσουμε το $\Delta \theta_{\text{περ}}$:

$$0 + d \cos \theta_{\text{περ}} \Delta \theta_{\text{περ}} = \Delta \lambda \rightarrow \Delta \theta_{\text{περ}} = \dots$$

Τέλος, $\Delta x \approx f \Delta \theta_{\text{περ}} = f \Delta \lambda / (d \cos \theta_{\text{περ}})$. Θα είναι μετρήσιμη αν Δx της τάξης των μερικών δεκάδων μm ώστε να ταιριάζουν με το resolution φωτογραφικού φιλμ ή CCD φωτ. μηχανή

Λύση Θέμα 5

(1) Υπολογισμός υπέρλεπτης υφής

Η δυναμική αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου πρωτονίου περιέχει έναν μεταβλητό όρο της μορφής

$$V_{SI} = AS \cdot I \quad (3)$$

αφού το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$ είναι το μόνο βαθμωτό μέγεθος που μπορεί να κατασκευαστεί από τα διανύσματα \mathbf{S} και \mathbf{I} . (Βαθμωτά μεγέθη είναι και τα \mathbf{S}^2 και \mathbf{I}^2 αλλά αυτά έχουν καθορισμένες τιμές και συνεπώς δεν έχουν δυναμικό περιεχόμενο).

Για τον προσδιορισμό του V_{SI} ας δούμε πως από την έκφραση της ολικής στροφορμής $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$ του συστήματος προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{I} = \frac{1}{2}(F^2 - S^2 - I^2) \quad (3)$$

Με τις προφανείς τιμές:

$$F^2 = \hbar^2 F(F+1), \quad S^2 = \hbar^2 S(S+1), \quad I^2 = \hbar^2 I(I+1)$$

προκύπτει

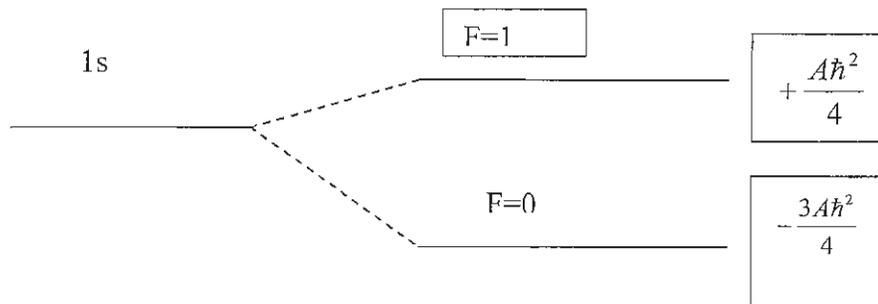
$$E_F = \frac{A\hbar^2}{2} \{F(F+1) - S(S+1) - I(I+1)\} \quad (5)$$

Το πλήθος των τιμών θα είναι όσες και οι δυνατές τιμές του F για δεδομένα S και I . Στην περίπτωση μας είναι $S=I=1/2$ και άρα θα είναι

$F=0$ ή 1 με ιδιοτιμές τα

$$E_0 = -\frac{3A\hbar^2}{4} \quad \text{και} \quad E_1 = \frac{A\hbar^2}{4}$$

που παραστατικά φαίνονται στο



Στο ως άνω σχήμα η διαφορά των ενεργειακών σταθμών είναι ίση με

$$\Delta E = A\hbar^2$$

Έτσι, διαπιστώνουμε πως η μαγνητική αλληλεπίδραση αυτή διαχωρίζει την θεμελιώδη στάθμη του Υδρογόνου σε δύο νέες.

Πριν την άρση του εκφυλισμού, η στάθμη 1s ήταν τετραπλά εκφυλισμένη. Η διαταραχή που εισάγεται από την μαγνητική αυτή αλληλεπίδραση, μερικώς μόνο αίρει τον εκφυλισμό. Το συνολικό πλήθος των καταστάσεων εξακολουθεί να είναι τέσσερα.

Παραστατικά φαίνεται στο Σχήμα ο τρόπος σύζευξης των μαγνητικών ροπών: