

$$8\ell^2 \cos\phi \left(\sin\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2mg\ell \sin\phi = 0$$

$$(772) \quad -1683 \quad \left(\sin\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\sin\phi (8\ell^2 \cos\phi - 2mg\ell) - \frac{\sqrt{2}}{2} 8\ell^2 \cos\phi = 0 \quad \cos\phi$$

$$\tan\phi (8\ell^2 \cos\phi - 2mg\ell) - \frac{\sqrt{2}}{2} 8\ell^2 \cos\phi = 0$$

ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε.

Εξεταζόμενο μάθημα: Αναλυτική Δυναμική

Διδάσκων - Εξεταστής: Α. Μαυραγάνης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εξεταστική Περίοδος: Σεπτεμβρίου 2010

Ονοματεπώνυμο εξεταζομένου:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} > 0 \Rightarrow \cos\phi$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

$$4 \left(\ell \sin\phi - \ell \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$V = 4\ell^2 \left(\sin\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$+ 2mg\ell \cos\phi$$

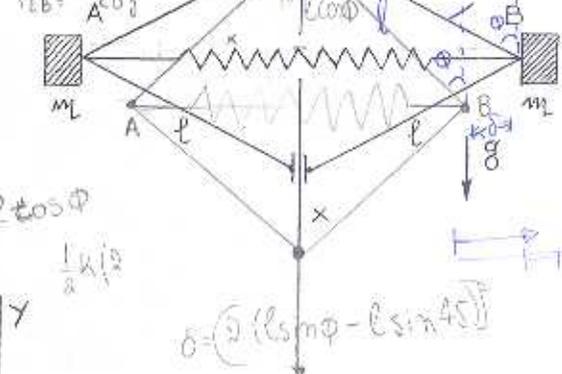
$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow 4\ell^2 g \left(\sin\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2mg\ell \sin\phi = 0$$

$$\omega_A = mg \vec{i}$$

$$\omega_B = mg \vec{j}$$

$$F_{EA} = -k\delta_1$$

$$F_{EB} = -k\delta_2$$



1. Στον μηχανισμό του σχήματος, το ελατήριο είναι γραμμικό με σταθερά k , και [απαραμόρφωτο όταν $\phi = 45^\circ$] ο δε οδηγός Ox λείος. [Να προσδιορισθούν μέσω της Αρχής των Δυνατών Έργων οι θέσεις ισορροπίας του συστήματος] και [να αναζητηθεί η σχέση μεταξύ των k και m για να είναι οι θέσεις αυτές ευσταθείς.]

$$x_0 = \ell \cos 45^\circ$$

$$y_0 = \ell \sin 45^\circ$$

$$y = mgh$$

2. Ο λείος ημκυκλικός οδηγός του σχήματος, ακτίνας R , κινείται μεταφορικά και χωρίς τριβή, επί οριζοντίου επιπέδου, μέσω του αμαξιδίου $AB\Gamma\Delta$, μάζας m_a το οποίο παλινδρομεί με την βοήθεια γραμμικού ελατηρίου σταθεράς k . Πάνω στον οδηγό κινείται σφαιρίδιο $P(m)$ με αφετηρία το σημείο A και αρχική ταχύτητα μηδενική. Την στιγμή που αρχίζει η μετατόπιση του P , αρχίζει και η κίνηση του αμαξιδίου με ταχύτητα V_{KO} , από την θέση O , όπου το ελατήριο είναι απαραμόρφωτο. Να περιγραφεί κατά Lagrange η κίνηση του συστήματος και να γραφούν τα ολοκληρώματα που την διέπουν, αφού προηγουμένωςδειχθεί ότι υπάρχουν ($AM = R/2$).

$$V = 2mg\ell \cos\phi + \frac{1}{2}k \left(\ell \frac{\sqrt{2}}{2} - \ell \sin\phi\right)^2 = 2mg\ell \cos\phi + \frac{1}{2}k \ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)^2$$

3. Η ράβδος AB , μήκους l και μάζας m , φέρει στο άκρο της A μικρή οπή, από την οποία διέρχεται κατακόρυφος άξονας σε προέκταση του Oz . Το άλλο άκρο της B προσδένεται σε αβαρές [μη εκτατό] νήμα μήκους D , που το συγκρατεί σε σταθερή απόσταση από την αρχή του συστήματος $Oxyz$. Το επίπεδο του τριγώνου AOB περιγράφεται περί τον Oz με την φορά που δείχνει το σχήμα, συνάμα δε το A κινείται, χωρίς τριβή, κατά μήκος του άξονα που διέρχεται από την μικρή οπή. [Να γραφούν οι εξισώσεις των συνδέσμων που περιορίζουν την ελευθερία κινήσεως της ράβδου] (Πόσοι είναι οι βαθμοί

ελευθερίας που χαρακτηρίζουν την εκτελούμενη κίνηση;) (Ποιες γενικευμένες συντεταγμένες θα προτείνατε για την περιγραφή της;)

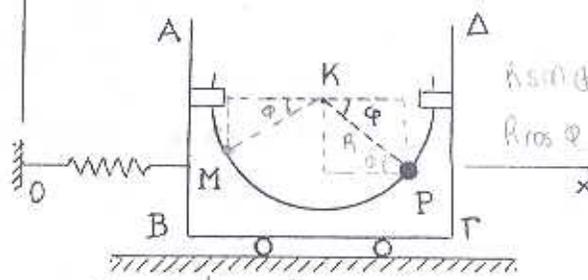
$$\frac{dV}{d\phi} = -2mg\ell \sin\phi - k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right) \left(-\cos\phi\right)$$

$$= 0$$

$$-2mg\ell \sin\phi - k\ell^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\phi + k\ell^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\phi \cos\phi = 0$$

$$-2mg$$

4 συνδέσμοι

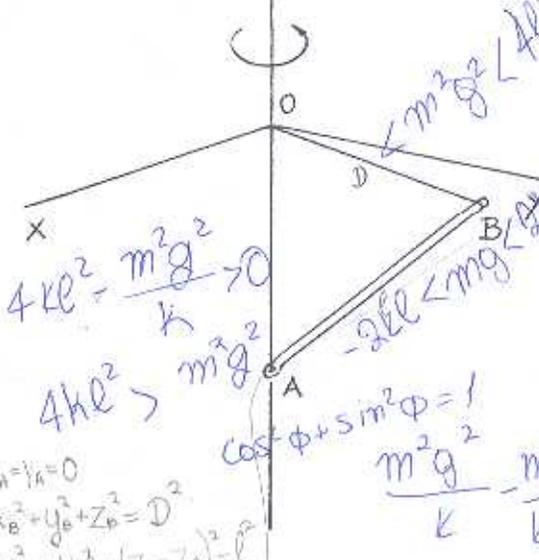


$$T = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_a \dot{u}^2$$

$$V = V_{ca} + V_w$$

$$x_p = x_A + \frac{R}{2}$$

$$y_p = \frac{R}{2}$$



$$4k\ell^2 - \frac{m^2 g^2}{k} > 0$$

$$4k\ell^2 > m^2 g^2$$

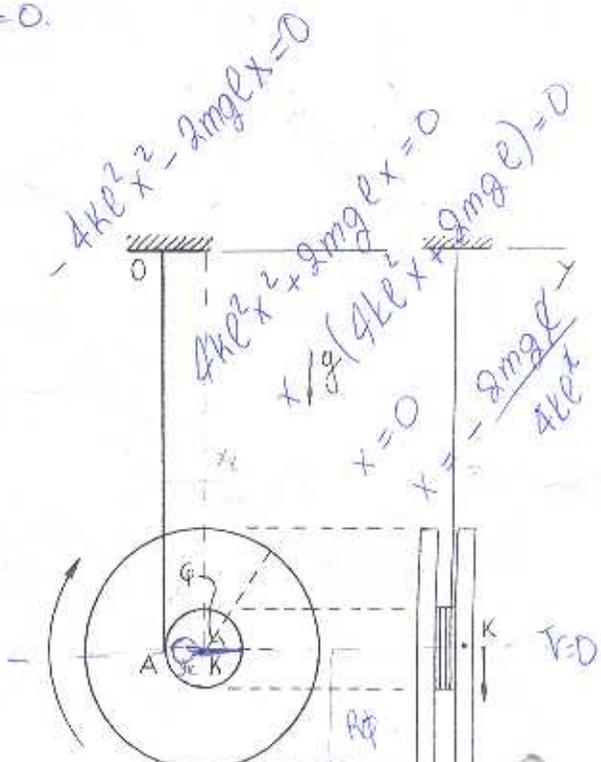
$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} > 0 \Rightarrow +k\ell^2 \cos^2\phi = 0$$

$$-2mg\ell \cos\phi + k\ell^2 \sin\phi \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-k\ell^2 \sin^2\phi + k\ell^2 \cos^2\phi = 0$$

$$\frac{dU}{d\phi} = 2mg\ell \sin\phi - \frac{1}{8} k 4\ell^2 2 \sin\phi \cos\phi = 0$$

Σημεια με 2 (x_A, y_A) $\sin\phi$
 (x_C, y_C)
 Το αβαρές, [μη εκτατό] νήμα OAB , με συνολικό μήκος 4ℓ , τυλίγεται γύρω από τον μικρό δίσκο (εσωτερικό) του συστήματος των τριών συγκολλημένων ομόκεντρων δίσκων, κατά το ελεύθερο δε άκρο του προσδένεται σε σταθερό σημείο της εφαπτομένης του δια του A . Ο μικρός δίσκος έχει ακτίνα R και μάζα m , καθένas δε από τους δύο μεγάλους δίσκους έχει ακτίνα $5R/2$ και μάζα $2m$. Το σύστημα «ρίχνεται» προς τα κάτω από την θέση $(OA)_{\text{αρχ}} = 1/8$ με ταχύτητα v_0 , με αποτέλεσμα το νήμα ν' αρχίσει να ξετυλίγεται, αναγκάζοντας τους τρεις δίσκους σε περιστροφή περί το K καθώς αυτό κινείται στην κατακόρυφο που διέρχεται απ' αυτό. Να γραφούν [οι εξισώσεις των συνδέσμων] που περιορίζουν την ελεύθερη κίνηση του συστήματος και να προσδιορισθεί, μέσω του φορμαλισμού Lagrange, ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η γωνία στρώσης ϕ (Πολική ροπή αδράνειας δίσκου: $I = \frac{m}{2} R^2$).



Σημείωση: Με περιοδική μεταβολή της απόστασης του A από το O , το σύστημα περιγράφει, το γνωστό παιχνίδι «γιο - γιο».

$$v_{\text{αρχ}} = \quad s = R\phi$$

$$v = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + v_0^2$$

$$2mg\ell \sin\phi + 4k\ell^2 \cos\phi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\phi\right) = 0 \Rightarrow \cos\phi = \frac{-2mg\ell \sin\phi}{4k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)}$$

$$2mg\ell \tan\phi + 4k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right) = 0$$

$$\tan\phi = -\frac{4k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)}{2mg\ell}$$

$$2mg\ell$$

$$\cos\phi = \frac{\frac{d}{d\phi} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi}}{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}} = \frac{Am^2 g^2 \ell^2 \sin\phi}{4k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right) + 4k\ell^2 \sin\phi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)}$$

$$14mR^2 \ddot{\phi} - 5mg = 0 \quad + \quad 16k\ell^2 m^2 g^2 \ell^2 \sin^2 \phi$$

$$2mg\ell \phi + 4k\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \phi\right) = 0$$

$$\ddot{\phi} = \frac{5g}{14R}$$

$$\phi \left(2mg\ell - 4k\ell^2\right) + 4k\ell^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$4k\ell^2 \sqrt{2} = (4k\ell^2 - 2mg)\phi$$

$$\phi = \frac{4k\ell^2 \sqrt{2}}{4k\ell^2 - 2mg}$$

$$\frac{5g}{14R} \cdot \frac{\ell}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\phi\right)} = \frac{5g}{14R} \cdot \frac{\ell}{-\cos\phi}$$



$$\frac{d^2v}{d\phi^2} = -2mg\ell \cos\phi - 4k\ell^2 \cos^2\phi$$

$$\Rightarrow 2mg\ell \cos\phi + 4k\ell^2 \cos^2\phi > 0$$

$$x_C = x_A$$

$$y_C = \frac{R}{2}$$

$$t=0 \Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{v_0}{R} + R\dot{\phi}$$

$$\dot{\phi}_0 = \frac{R}{x_0}$$

$$\dot{\phi}_0$$