

# ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

5 Σεπτεμβρίου 2003

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

I) Εστω  $G$  το σύνολο των  $2 \times 2$  πραγματικών πινάκων με μη μηδενική ορίζουσα. Ορίζουμε το γινόμενο δύο στοιχείων του  $G$  ως τον συνήθη πολ/σμό πινάκων.

α) Δείξτε ότι η  $G$  είναι ομάδα.

β) Δείξτε ότι το σύνολο  $O$  των  $2 \times 2$  πραγματικών ορθογωνίων πινάκων είναι υποομάδα

της  $G$ . (Ένας πίνακας  $A$  είναι ορθογώνιος αν  $AA^T = I$ , όπου  $A^T$  ο ανάστροφος του  $A$ .)

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η  $O$  δεν είναι κανονική υποομάδα της  $G$ .

γ) Βρείτε έναν μη τετριμένο ομομορφισμό από την  $G$  πάνω σε μία αβελιανή ομάδα.

II) Εστω  $G$  ομάδα και  $Z$  το κέντρο της  $G$ . Αυτό είναι το σύνολο όλων των στοιχείων  $K$  της  $G$ , τέτοια ώστε  $AK = KA$  για κάθε  $A \in G$ . Δείξτε ότι αν η ομάδα πηλίκο  $G/Z$  είναι κυκλική, τότε η  $G$  είναι αβελιανή.

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Για καθένα από τα παρακάτω είτε δώστε ένα παράδειγμα είτε αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιο παράδειγμα.

1. Μία μη αβελιανή ομάδα.
2. Μία πεπερασμένη αβελιανή ομάδα που δεν είναι κυκλική.
3. Μία άπειρη ομάδα με μία υποομάδα δείκτη 5. (Δείκτης μιας υποομάδας λέγεται ο αριθμός των συμπλόκων της μέσα στην ομάδα.)
4. Δύο πεπερασμένες ομάδες που έχουν την ίδια τάξη, αλλά δεν είναι ισομορφικές.
5. Μία ομάδα  $G$  με μία υποομάδα  $H$  που δεν είναι κανονική.
6. Μία ομάδα  $G$  με μία κανονική υποομάδα  $H$ , τέτοια ώστε η ομάδα πηλίκο  $G/H$  δεν είναι ισομορφική προς οποιαδήποτε υποομάδα της  $G$ .
7. Μία ομάδα  $G$  με μία υποομάδα  $H$  με δείκτη 2, που να μην είναι κανονική.

## ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

I) α) Έστω  $G$  μία κυκλική ομάδα και  $a, b \in G$  όχι τετράγωνα. (Ένα στοιχείο  $a \in G$  λέγεται τετράγωνο αν υπάρχει  $x \in G$ , έτσι ώστε  $xx = a$ .) Δείξτε ότι το στοιχείο  $ab$  είναι τετράγωνο.

β) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αυτό δεν ισχύει αν η ομάδα δεν είναι κυκλική.

II) Έστω η μετάθεση  $\sigma \in S_n$  που γράφεται ως γινόμενο ξένων κύκλων:  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ .

α) Δείξτε ότι η τάξη της  $\sigma$  είναι το ΕΚΠ των μηκών των κύκλων  $c_i$  για  $i=1, 2, \dots, k$ .

β) Δώστε ένα στοιχείο της  $S_9$  τάξης 20.

γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει στοιχείο της  $S_9$  τάξης 18.

III) α) Σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων, δώστε όλες τις πεπερασμένα παραγόμενες αβελιανές ομάδες τάξης 8.

β) Γράψτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία της ομάδας  $\mathbb{Z}_{15}$ .

γ) Εστω  $(\mathbb{Z}_{15})^*$  το σύνολο αυτών των αντιστρέψιμων στοιχείων, εφοδιασμένο με την πράξη του πολ/σμού. Δείξτε ότι αυτό είναι μία αβελιανή ομάδα και αναγνωρίστε ποιά είναι σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης.