

ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΩΝ

Μάιος 2007

ΘΕΜΑ 1. (α) Μία πηγή πληροφορίας U παράγει η διαφορετικά σύμβολα u_1, u_2, \dots, u_n με αντίστοιχες πιθανότητες $p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_n)$. Να δείξετε ότι για έναν στιγμιαίο κώδικα C ισχύει: $H_r(U) = \frac{H(U)}{\log r} \leq L$.

(β) Μία πηγή πληροφορίας έχει τρία σύμβολα με πιθανότητες $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Να δείξετε ότι ένας δυαδικός κώδικας Huffman για την πηγή αυτή έχει μέσο μήκος $2 - p_1$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Μία πηγή πληροφορίας U παράγει η διαφορετικά σύμβολα u_1, u_2, \dots, u_n με αντίστοιχες πιθανότητες $p(u_1), p(u_2), \dots, p(u_n)$. Αν C είναι ο αντίστοιχος r -αδικός κώδικας ($r > 2$) που παράγεται με τη μέθοδο του Shannon, και το μήκος της κωδικής λέξης που αντιστοιχεί στο σύμβολο u_i είναι ℓ_i , $i = 1, \dots, n$, να δείξετε ότι:

- (i) $\sum_{i=1}^n r^{-\ell_i} \leq 1$
- (ii) $H_r(U) \leq L < 1 + H_r(U)$

(β) Μία πηγή πληροφορίας παράγει έξι διαφορετικά σύμβολα $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ με αντίστοιχες πιθανότητες 0.55, 0.20, 0.15, 0.05, 0.03, 0.02. Να βρεθεί ο αντίστοιχος δυαδικός κώδικας με τη μέθοδο του Fano, καθώς επίσης και η αποδοτικότητά του.

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω ότι C είναι ο δυαδικός κώδικας Hamming $\text{Ham}(r, 2)$, $r \geq 2$. Να δείξετε ότι:

- (i) Η ελάχιστη απόσταση του C είναι 3.
- (ii) Είναι τέλειος κώδικας.

(β) Να βρείτε όλους τους δυαδικούς κυκλικούς κώδικες μήκους 4 και να γράψετε τον γεννήτορα πίνακα του καθενός από αυτούς.

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω C ο δυαδικός κώδικας επανάληψης μήκους n και C^\perp ο διεκός του. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κωδικών λέξεων βάρους 4 του C^\perp .

(β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα αναφοράς των συνδρόμων για τον τέλειο δυαδικό γραμμικό κώδικα C με γεννήτορα πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να αποκωδικοποιήσετε το διάνυσμα 00000011.

Διάρκεια εξέτασης: $2\frac{1}{2}$ ώρες.