

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών - Σεπτεμβριος 2006 (Εξέταση Ιουνίου)

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1:

1. Να δειχθεί ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$, $t > 0$ είναι επίπεδη και να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου της.

2. Να δείξετε ότι η περιβάλλουσα των καθέτων ευθειών μιας επίπεδης καμπύλης είναι η εξελιγμένη της καμπύλης.

3.1 Να δειχθεί ότι $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \kappa k'$, όπου $\mathbf{r}(s)$ είναι επίπεδη καμπύλη φυσικά παραμετρισμένη.

3.2 Αν $\mathbf{r}(s)$ είναι χωρική καμπύλη φυσικά παραμετρισμένη, να δειχθεί ότι $[\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}'''] = \kappa^2 \tau$.

4. Να δείξετε ότι για κάθε παραμετρική παράσταση μιας επίπεδης καμπύλης $\mathbf{r}(t)$, η ποσότης $\frac{\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{N}}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ είναι

ανεξάρτητη από την παραμέτρηση της καμπύλης.

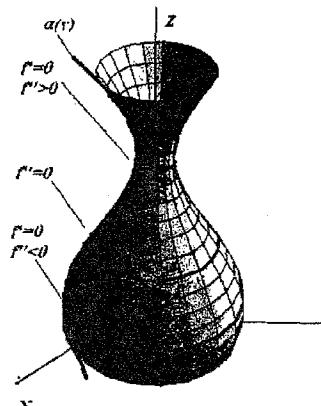
5. Αν $\mathbf{r}(s) = \left(\alpha \cos \frac{s}{\gamma}, \alpha \sin \frac{s}{\gamma}, \frac{\beta s}{\gamma} \right)$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha > 0$ είναι μία κυλινδρική έλικα, να βρεθεί η καμπύλη που

ορίζεται από την σχέση $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k} \mathbf{N}$, (κεντρική καμπύλη της έλικας) και να δείξετε ότι είναι κυλινδρική έλικα

της οποίας να προσδιορίσετε τον κύλινδρο και το βήμα. (Να γίνει σχήμα για $\alpha=4$ και

$\beta=3$.

(Οι ερωτήσεις 1-5 είναι ισοδύναμες)



ΘΕΜΑ 2^o.

Δίνεται μια καμπύλη $a(v) = (f(v), 0, v)$ με $f(v) > 0$ και η επιφάνεια εκ περιστροφής

$M = \mathbf{x}(D)$ περί τον άξονα $z'z$ που αυτή παράγει με: $\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v)$, $(u, v) \in D = (0, 2\pi) \times (1, 6)$.

1. Να δειχθεί ότι το σημείο $p = (0, f(4), 4)$ ανήκει στην επιφάνεια. (0.3)

2. Αν $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$ να βρεθεί μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$, $p = (0, 1, 4)$ και να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = (-3, 10, 5)$ ανήκει στον $T_p M$. Να βρεθούν οι συνιστώσες του ως προς μια βάση $T_p M$. (0.9)

3. Να υπολογισθούν τα θεμελιώδη ποσά 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της επιφάνειας σε τυχόν σημείο της. (0.8)

4. Να αποδειχθεί ότι στο τυχόν σημείο p , η καμπυλότητα Gauss K και η μέση καμπυλότητα H της επιφάνειας δίνονται από τις:

$$H = -\frac{1+f'^{12}(v)-f(v)f''(v)}{2f(v)(1+f'^{12}(v))^2}, \quad K(u, v) = -\frac{f''(v)}{f(v)(1+f'^{12}(v))^2}. \quad (1)$$

5. Αν το σημείο $p = (0, 1, 4) \in M$ προέρχεται από περιστροφή σημείου της καμπύλης $a(v)$

με $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$, $f''(4) = 0$, να βρεθούν οι κύριες καμπυλότητες στο p και ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $w \in T_p M$, αν υπάρχει με κάθετη καμπυλότητα $k(w) = 3$. (1)

6. Να χαρακτηρισθούν τα σημεία της επιφάνειας που προέρχονται από περιστροφή σημείων της καμπύλης $a(v) = (f(v), 0, v)$ που αντιστοιχούν α) σε μέγιστο, β) σε ελάχιστο και γ) σε σημείο καμπής της $f(v)$ και να εντοπισθούν στο σχήμα. (1)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ωρ

Anaxtiges Diag. Γεωμετρίας 13/9/06.

ΘΕΜΑ 2ο $x(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, v)$.

1. $(0, f(4), 4) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, v) \Rightarrow v=4, u=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho \in M$.

2. $x_u = (f'\sin u, f\cos u, 0), x_v = (f'\cos u, f'\sin u, 1)$

$x_u(\pi/2, 4) = (-f(4)\sin \frac{\pi}{2}, f(4)\cos \frac{\pi}{2}, 0) = (-1, 0, 0)$ {8αση}

$x_v(\pi/2, 4) = (0, 2, 1)$

$(-3, 10, 5) = k(-1, 0, 0) + l(0, 2, 1) \Rightarrow k=3, l=5 \Rightarrow (3, 5)$ οι συνέ.

3. $E = x_u \cdot x_u = f^2(v), F = 0, G = 1 + f'(v)^2$

$U = \frac{1}{\sqrt{1+f'(v)^2}} (\cos u, \sin u, -f'(v))$

$x_{uu} = (-f\cos u, -f\sin u, 0), x_{uv} = (-f'\sin u, f'\cos u, 0)$

$x_{vv} = (f''\cos u, f''\sin u, 0)$

Αρχ

$$L = x_{uu} \cdot U = \frac{-f(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}, M = 0, N = \frac{f''(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}$$

4. Από τους υπολογισμούς K και H $2f+G=0$.

5. Στο π. Δα είναι:

$$H = -\frac{1+4}{2 \cdot 1 (1+4)^2} = -\frac{5}{50} = -\frac{1}{10}, K = 0$$

Αρχ οι λύπις λαχταριώτων είναι $K_1 + K_2 = 2H = -\frac{1}{5}$

$$K_1 \cdot K_2 = 0 \quad \text{Αρχ} \quad K_{\max} = K_1 = 0, \quad K_{\min} = K_2 = -\frac{1}{5}$$

Αρχ διένιαντας w με $k(w)=3$

6. α) v τοπ. πιγιγιο $\Rightarrow f'(v)=0, f''(v)<0 \Rightarrow k = -\frac{f''(v)}{f'(v)} > 0$

\Rightarrow Εστιατορίας Γράφη

β) v τοπ. έξιγιο $\Rightarrow f'(v)=0, f''(v)>0 \Rightarrow k < 0$ (Υπόγειο)

γ) v σταθερή $\Rightarrow f''(v)=0 \Rightarrow k=0$ η κρύβεται

Εμπρεσούρα

ΘΕΜΑ 3

$$1. (\dot{f}(v) \cos u, \dot{f}(v) \sin u, v) = (0, \dot{f}(4), 4) \Leftrightarrow v=4, u=\frac{\pi}{2}$$

Από $\chi(\frac{\pi}{2}, 4) = (0, \dot{f}(4), 4)$ ως ιπάρ σημείο στην φάση.

$$2. \chi_u(u, v) = (-\dot{f}(u) \sin u, \dot{f}(u) \cos u, 0)$$

$$\chi_v(u, v) = (\dot{f}'(u) \cos u, \dot{f}'(u) \sin u, 1)$$

$$\chi_u(\frac{\pi}{2}, 4) = (-\dot{f}(4), 0, 0) = (-1, 0, 0) \quad \text{έχει σταθερή } T_p M.$$

$$\chi_v(\frac{\pi}{2}, 4) = (0, \dot{f}'(4), 1) = (0, 2, 1)$$

$$v = (-3, 10, 5) = k(-1, 0, 0) + j(0, 2, 1) \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ j=5 \end{cases} \Rightarrow v = 3\chi_u + 5\chi_v$$

$$3. v_1 \cdot \chi_u = (0, 1, -2) \cdot (-1, 0, 0) = 0 \quad \Rightarrow v_1 \parallel \chi_u \times \chi_v \Rightarrow k=0$$

$$v_1 \cdot \chi_v = (0, 1, -2) \cdot (0, 2, 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4. E = \chi_u \cdot \chi_u = \dot{f}^2(v), F = \chi_u \cdot \chi_v = 0, G = \chi_v \cdot \chi_v = 1 + \dot{f}'^2(v)$$

$$\chi_{uu} = (-\ddot{f} \cos u, -\ddot{f} \sin u, 0), \chi_{uv} = (-\ddot{f}' \sin u, \ddot{f}' \cos u, 0)$$

$$\chi_{vv} = (\ddot{f}'' \cos u, \ddot{f}'' \sin u, 0)$$

$$\chi_u \times \chi_v = (\dot{f} \cos u, \dot{f} \sin u, -\dot{f}') \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{f}'^2(v)}} (\cos u, \sin u, -\dot{f}')$$

$$L = \chi_{uu} \cdot V = -\frac{\dot{f}(v)}{\sqrt{1 + \dot{f}'^2(v)}}, M = 0, N = \frac{\dot{f}''(v)}{\sqrt{1 + \dot{f}'^2(v)}}$$

5. Από την εφαρμογή των δύναμης για την Κ ως Η.

$$6. K(\frac{\pi}{2}, 4) = -\frac{\dot{f}''(4)}{\dot{f}(4)(1 + \dot{f}'^2(4))} = 0, H(\frac{\pi}{2}, 4) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Από $\sigma_1 = \frac{\dot{f}(4)(1 + \dot{f}'^2(4))}{\dot{f}''(4)}$ αποδίδεται στην Κ = 0 (μεγιστών) και $K_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ϵ στο $\times 10^3$). Από δεν υπάρχει η Ε στο $W \in T_p M$.

6. Αν v_0 δειν μεγιστών $\Rightarrow \dot{f}'(v_0) = 0, \dot{f}''(v_0) < 0 \Rightarrow K > 0$ (επιπλέον $\dot{f}'''(v_0) = 0$)

επειδή $\dot{f}''(v_0) < 0, \dot{f}'''(v_0) > 0 \Rightarrow K < 0$ γιατί

παρόλοτε $\dot{f}'''(v_0) > 0 \Rightarrow K = 0, H \neq 0 \Rightarrow k = 0$

