

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών - Εξέταση Σεπτεμβρίου 2005

Ονοματεπώνυμο:

!! Επιλέγετε τρία θέματα και στη συνέχεια απαντάτε στα ερωτήματά τους

Διάρκεια εξέτασης: 2ωρ 15' ώρες

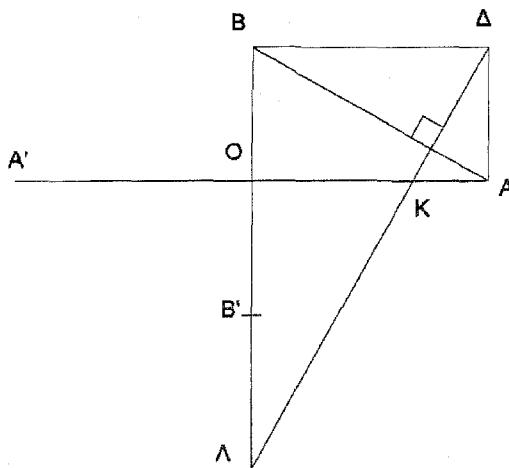
ΘΕΜΑ 1^ο.

α) Να δοθούν περιγραφικά και με ένα πρόχειρο σχήμα οι ορισμοί των κορυφών και της εξειλιγμένης μιας επίπεδης καμπύλης $r = r(t)$.

β) Να δειχθεί ότι η εξειλιγμένη της έλλειψης: $r(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)$ είναι η καμπύλη:

$$s(t) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

γ) Στην παρακείμενη κατασκευή, τα τμήματα AA' και BB' είναι οι άξονες της προηγούμενης έλλειψης. Να δειχθεί ότι τα σημεία K και Λ είναι τα κέντρα καμπυλότητας της έλλειψης στις κορυφές A και B αντίστοιχα. Να υπολογισθούν επίσης, οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας.



ΘΕΜΑ 2^ο.

α) Να δειχθεί ότι η καμπύλη: $r(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$, με $(-2\pi \leq t \leq 2\pi)$:

- είναι σφαιρική
- είναι κυλινδρική
- να σχεδιασθεί η καμπύλη ως τομή των δύο επιφανειών των οποίων είναι τομή.

β) Να εκφρασθεί η τοπική μορφή της καμπύλης του χώρου $r = r(s)$, στο σημείο μηδέν, συναρτήσει του τριάκμου του Frenet και να σχεδιασθούν οι προβολές της καμπύλης στα τρία επίπεδα του τριέδρου Frenet.

γ) Αν $r = r(s)$ μια καμπύλη του χώρου με μοναδιαία ταχύτητα, Να εκφρασθεί η παράγωγος $r^{(4)}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων T, N, B .

ΘΕΜΑ 3^ο. Δίνεται η φυσική παραμετρική καμπύλη $r(u)$, $u \in I$, και η παραμετρική (εφαπτομενική της καμπύλης) επιφάνεια $M : x(u, v) = r(u) + vr'(u)$, $(u, v) \in D = I \times J$, όπου I και J ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R} .

1. Να εξετασθεί για ποιά (u, v) η $x(u, v)$ δεν ορίζει μια ομαλή παραμετρική επιφάνεια και να βρεθούν τα σημεία του $x(D)$ που αντιστοιχούν σ' αυτά.
2. Να εκφρασθούν τα x_u, x_v συναρτήσει του τριέδρου Frenet $\{T, N, B\}$ της καμπύλης $r(u)$ και να βρεθεί μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$ του σημείου $p(x(u, v))$.
3. Να βρεθούν τα θεμελιώδη ποσά α' τάξεως και να δειχθεί ότι $U(u, v) = -\frac{v}{|v|} B(u)$.

4. Σε σημεία (u, v) με $v > 0$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις: $Sx_u = -U_u$, $Sx_v = -U_v$ να βρεθεί ο πίνακας $[S]$ του τελεστή σχήματος S ως προς τη βάση $\{x_u, x_v\}$ και να δειχθεί ότι οι κύριες καμπυλότητες είναι: $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{\tau(u)}{vk(u)}$ και να δειχθεί ότι όλα τα σημεία της ομαλής παραμετρικής επιφάνειας είναι παραβολικά.

ΘΕΜΑ 4^ο:

1. Να δοθεί ο ορισμός της γεωδαισιακής καμπύλης $\alpha: I \rightarrow M$ μιας επιφάνειας M και να δειχθεί ότι μια γεωδαισιακή έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας.
2. Να αποδειχθεί ότι στην σφαίρα $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ η καμπύλη

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin t, \frac{a}{2} \right), \quad t \in (0, 2\pi)$$

είναι ένας παράλληλος που έχει σταθερό μέτρο

ταχύτητας αλλά δεν είναι γεωδαισιακή, η καμπύλη $\beta(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ είναι γεωδαισιακή.

3. Να γίνει σχήμα στο οποίο να εμφανίζεται η σφαίρα, ο παράλληλος γ , η καμπύλη β , η ταχύτητα και η επιτάχυνσή τους σε ένα σημείο καθώς και το κάθετο διάνυσμα της σφαίρας στα σημεία αυτά εξηγώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος 2.

$$\text{DEMA 3: } x(u,v) = r(u) + vr'(u)$$

$$x_u = r'(u) + vr''(u) = T + vT' = T + v k N \quad T_p M = \{ T, N \}$$

$$x_v = r'(u) = T$$

$$x_u \times x_v = (T + v k N) \times T = v k N \times T = -v k(u) B(u)$$

$$x_u \times x_v = 0 \Leftrightarrow v=0 \text{ or } k(u)=0$$

Apa și operează o asemenea $(u, 0)$ sau (u, v) cu $k(u)=0$.

$$x_{uu} = T' + v k' N + v k N' = k N + v k' N + v k (-kT + \tau B) \\ = (k + v k') N - k^2 v T + v k \tau B$$

$$x_{uv} = k N$$

$$x_{vv} = 0 \quad \|x_u \times x_v\| = |v| k$$

$$F = x_{uu} \cdot x_u = 1 + v k^2 \quad U = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = -\frac{v}{|v|} B / \|B\|$$

$$F = x_u \cdot x_v = 1$$

$$G = x_v \cdot x_v = 1$$

$$L = x_{uu} \cdot U = v k \tau \cdot \left(-\frac{v}{|v|}\right) = -\frac{v^2}{|v|} k \tau = -v k \tau$$

$$M = x_{uv} \cdot U = 0$$

$$N = x_{vv} \cdot U = 0$$

$$\text{Apa } L-N-M=0, \quad L \neq 0$$

\Rightarrow nu există soluții

$$Sx_u = -U_u = B' = -\tau N$$

$$Sx_v = -U_v = 0$$

$$\text{Din } x_u = T + v k N, \quad x_v = T \Rightarrow N = \frac{1}{v k} x_u - \frac{1}{v k} x_v$$

Apa

$$Sx_u = -\frac{\tau}{v k} x_u + \frac{\tau}{v k} x_v \Rightarrow [S] = \begin{bmatrix} -\frac{\tau}{v k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Sx_v = 0$$

Ανω σημείου προβλήματαν

$$k_1 = 0 \quad \mu \in 18/108/\mu \Rightarrow (0,1) \Rightarrow c_1 = \alpha x_u + x_v = x_u = T$$

$$k_2 = -\frac{\tau}{\nu k} \quad (1-1) \Rightarrow c_2 = x_u - x_v = \nu k N$$

ΟΕΜΑ 4:

$$1. \alpha \text{ γεωδ} \Leftrightarrow \alpha''(t) \parallel V(\alpha(t)) \text{ & } t \in I.$$

$$\text{Αν } \alpha \text{ γεωδ} \Rightarrow \alpha''(t) \cdot \alpha'(t) = 0 \quad \text{διότι } \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} M$$

$$\text{Απ } \alpha \quad \frac{d\| \alpha'(t) \|^2}{dt} = 2 \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$$

$$2. \text{ Για να γίνει } 60^\circ \text{ εμμέσω } z = \alpha/2 \quad (\text{διότι } \delta \text{ εποχή για } \alpha \text{ να } \theta \text{ λειτουργεί})$$

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \cos t, 0 \right) \Rightarrow \| \alpha'(t) \| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \alpha$$

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \cos t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \sin t, 0 \right) \quad (1)$$

$$V(x,y,z) \parallel \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2-\alpha^2} = (2x, 2y, 2z)$$

$$V(\alpha(t)) \parallel \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha \sin t, \frac{\alpha}{2} \right) \quad (2)$$

Ανω (1) και (2) $\Rightarrow \alpha''(t) \text{ και } V(\alpha(t)) \text{ δεν είναι } \pi/2 \text{ απότομα.}$

3.

