

## ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

### **Άσκ. 3.2.**

Η συνάρτηση  $y = g(x)$ ,  $\mathcal{S} \rightarrow T$  είναι αντιστρέψιμη, και συνεπώς έχουμε

$$x = h(y) \equiv g^{-1}(y), \quad \forall y \in g(\mathcal{S}).$$

Θεωρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα  $P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_0 = y_{i_0}, \dots, Y_n = y_{i_n}]$  για οποιαδήποτε επιλογή καταστάσεων  $y_{i_0}, \dots, y_{i_n}, y_{i_{n+1}} \in T$  και  $n \in \mathbb{N}$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_0 = y_{i_0}, \dots, Y_n = y_{i_n}] &= P[X_{n+1} = h(y_{i_{n+1}}) | X_0 = h(y_{i_0}), \dots, X_n = h(y_{i_n})] \\ &= P[X_{n+1} = h(y_{i_{n+1}}) | X_n = h(y_{i_n})] = P[Y_{n+1} = y_{i_{n+1}} | Y_n = y_{i_n}]. \end{aligned}$$

Συνεπώς η Σ.Α.  $\{Y_n = g(X_n) : n = 0, 1, \dots\}$  είναι Μαρκοβιανή.

Δεν είναι απαραίτητο να είναι η συνάρτηση  $g$  αμφιμονοσήμαντη (β. Άσκ. 3.1).

### **Άσκ. 3.5.**

Θεωρούμε τη δείκτρια συνάρτηση  $I_n$  του ενδεχόμενου  $\{X_n = i\}$  για  $n \geq 1$ , δηλαδή έχουμε  $I_n = 1$  όταν  $X_n = i$  και  $I_n = 0$  όταν  $X_n \neq i$ . Ορίζουμε την τ.μ.  $N_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$  η οποία εκφράζει το συνολικό αριθμό επανεμφανίσεων της κατάστασης  $i$  με εκκίνηση από την ίδια. Λαμβάνοντας την αντίστοιχη μέση τιμή προκύπτει:

$$E[N_{ii}] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n | X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n | X_0 = i].$$

Όμως

$$E[I_n | X_0 = i] = p_{ii}^{(n)} = P[X_n = i | X_0 = i].$$

Έχουμε συνεπώς

$$E[N_{ii}] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = P_{ii}(1) - 1.$$

Το δεύτερο μέλος απειρίζεται εάν και μόνο εάν η κατάσταση  $i$  είναι επαναληπτική.

**Άσκ. 3.7.**

Έχουμε το στοχαστικό πίνακα

$$\mathbf{P}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

Παρατηρούμε ότι  $E_1 \rightarrow E_4 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$ . Συνεπώς οι καταστάσεις αυτές αποτελούν μία κλειστή κλάση  $C_1$ . Η κατάσταση  $E_3 \rightarrow E_4$  και συνεπώς αποτελεί μια ανοικτή κλάση  $C_2$ . Η κανονική μορφή του παραπάνω στοχαστικού πίνακα είναι:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_4 & E_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_4 \\ E_3 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

Η ύπαρξη ενός τουλάχιστον μη μηδενικού διαγώνιου στοιχείου μέσα σε κάθε κλάση αποκλείει την περιοδικότητα αυτών.

Έχουμε δηλαδή τις κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων  $C_1 = \{E_1, E_2, E_4\}$  και  $C_2 = \{E_3\}$  με  $C_2 \not\sim C_1$ . Η κλάση  $C_1$  είναι επαναληπτική και η κλάση  $C_2$  είναι παροδική. Επιπλέον η κλάση  $C_1$  είναι γνήσια επαναληπτική αφού έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Και οι δύο κλάσεις είναι μη περιοδικές.

Για τον δεύτερο στοχαστικό πίνακα έχουμε:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

Παρατηρούμε ότι  $E_3 \rightarrow E_3$  αποκλειστικά. Άρα η κατάσταση  $E_3$  είναι μια απορροφητική και συνεπώς αποτελεί από μόνη της μια κλάση  $C_1$ . Επίσης έχουμε  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_5 \rightarrow E_1$ , και  $E_5 \rightarrow E_4 \rightarrow E_2$  Οι καταστάσεις  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_4$  και  $E_5$  επικοινωνούν μεταξύ τους και συνεπώς αποτελούν μια δεύτερη κλάση  $C_2$ . Έχουμε συνεπώς τις κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων:  $C_1 = \{E_3\}$  και  $C_2 = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$ . Επειδή έχουμε  $E_2 \rightarrow E_3$  θα έχουμε ότι  $C_1 \succ C_2$ .

Η κανονική μορφή του στοχαστικού πίνακα  $P_2$  είναι:

$$P_2 = \begin{bmatrix} & E_3 & E_1 & E_2 & E_4 & E_5 \\ E_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ E_2 & 0.3 & 0.2 & 0 & 0 & 0.5 \\ E_4 & 0.1 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ E_5 & 0 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Η κλάση  $C_1$  είναι επαναληπτική και η κλάση  $C_2$  είναι παροδική. Και οι δύο κλάσεις είναι απεριοδικές.

### Ασκ. 3.6

(α) Έχουμε  $P[V_i \geq k | X_0 = i] = f_{ii}^k$  με  $f_{ii} = P[T_{ii} < \infty | X_0 = i] = 1$ , όταν η κατάσταση  $i$  είναι επαναληπτική και  $< 1$ , όταν η κατάσταση  $i$  είναι παροδική. Επομένως

$$\eta_{ii} = P[V_i = \infty | X_0 = i] = \lim_{k \rightarrow \infty} P[V_i \geq k | X_0 = i] = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{ii}^k = \begin{cases} 1, & \text{όταν η κατάσταση } i \text{ είναι επαναληπτική,} \\ 0, & \text{όταν η κατάσταση } i \text{ είναι παροδική.} \end{cases}$$

(β) Έχουμε επίσης  $P[V_j \geq k | X_0 = i] = f_{ij} f_{ii}^{k-1}$ , και επομένως

$$\eta_{ij} = P[V_j = \infty | X_0 = i] = \lim_{k \rightarrow \infty} P[V_j \geq k | X_0 = i] = f_{ij} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} f_{ii}^{k-1} = \begin{cases} f_{ij}, & \text{όταν η κατάσταση } j \text{ είναι επαναληπτική,} \\ 0, & \text{όταν η κατάσταση } j \text{ είναι παροδική.} \end{cases}$$

Έχουμε όμως  $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P[T_{ij} = n | X_0 = i] = P[T_{ij} < \infty | X_0 = i]$ , και συνεπώς το ζητούμενο.

### Ασκήσεις 3.7, 3.8 και 3.9

Επιλύονται με διαγωνιοπόίηση των στοχαστικών πινάκων όταν έχουν διαφορετικές ιδιοτιμές. Εφαρμόζουμε ανάλυση κατά Jordan (Θεώρημα Perron-Frobenius) στην περίπτωση πολλαπλών ιδιοτιμών.

### Ασκ. 3.10(β)

Ο στοχαστικός πίνακας εδώ είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_i & \dots & \dots \\ 1 & 1-r & r & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 1-r & r & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ i & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-r & r & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Επιλύοντας το σύστημα  $\pi P = \pi$ , με  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots)$ , λαμβάνουμε διαδοχικά:

$$\pi_1 = \pi_0 \times \frac{1-\alpha_0}{1-r},$$

$$\pi_2 = \{\pi_1(1-r) - \pi_0\alpha_1\} / (1-r) = \pi_1 - \pi_0 \frac{\alpha_1}{1-r} = \pi_0 \times \frac{1-\alpha_0 - \alpha_1}{1-r},$$

και γενικά

$$\pi_i = \pi_0 \times \frac{1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{i-1}}{1-r}, \quad (i \geq 1).$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$ , και θέτοντας

$$A_i = 1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \dots - \alpha_{i-1} = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j, \quad (i \geq 1),$$

έχουμε

$$\pi_i = A_i \pi_0 / (1-r), \quad (i \geq 1).$$

Ομως οι πιθανότητες  $\pi_i = A_i \pi_0 / (1-r)$ , ( $i \geq 1$ ), μαζί με τη  $\pi_0$ , πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη  $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ , και συνεπώς πρέπει:

$$\pi_0 = \left\{ 1 + \frac{1}{1-r} \times \sum_{i=1}^{\infty} A_i \right\}^{-1} = \frac{1-r}{1-r+A},$$

με  $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ . Συνεπώς, ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κατανομής ισορροπίας είναι να έχουμε  $A < \infty$ , και τότε

$$\pi_i = \pi_0 \times \frac{A_i}{1-r} = \frac{A_i}{1-r+A}, \quad (i > 0).$$

**Σημείωση:** Επειδή η ακολουθία  $\{\alpha_i : i=0,1,\dots\}$  αποτελεί την κατανομή του “άλματος”  $Z$  από τη θέση “0” στη θέση “i”, θα έχουμε:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \alpha_i = E[Z].$$

### Άσκ. 3.11

Στον συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο η επιστροφή στην ίδια θέση γίνεται σε άρτιο αριθμό βημάτων με πιθανότητα:

$$p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n} / 2^{2n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ο περίπατος αυτός είναι επαναληπτικός εάν και μόνο εάν ισχύει η σχέση:

$$p_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} / 2^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} / 2^{2n} = \infty.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling,  $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ , όπου το σύμβολο “ $\approx$ ” εκφράζει ότι ο λόγος των δύο μελών τείνει στην μονάδα για  $n \rightarrow \infty$ , λαμβάνουμε :

$$\tilde{p}_{00}^{(2n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

και συνεπώς έχουμε

$$\tilde{p}_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Λόγω της σχέσης  $p_{00}^{(2n)} / \tilde{p}_{00}^{(2n)} \rightarrow 1$  για  $n \rightarrow \infty$ , οι δύο σειρές είτε θα συγκλίνουν και οι δύο είτε θα αποκλίνουν και οι δύο. Όμως η τελευταία σειρά είναι γνωστό ότι αποκλίνει, άρα και η πρώτη σειρά αποκλίνει και συνεπώς η κατάσταση “0”, όπως και κάθε άλλη κατάσταση, αφού όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, είναι επαναληπτική. Εφαρμόζοντας την ίδια προσέγγιση για το  $n!$  αποδεικνύεται ότι ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος σε  $d$  διαστάσεις έχει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{00}^{(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi n} \right\}^{\frac{d}{2}},$$

και συνεπώς η σειρά αποκλίνει για  $d=2$  και συγκλίνει για  $d > 2$ .

### Άσκ. 3.20

Αφού  $P$  διπλά στοχαστικός, ο πίνακας  $\mathbf{Q} = P^T$  είναι στοχαστικός. Εστω επίσης  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)$  η κατανομή ισορροπίας του  $P$ . Έχουμε δηλαδή για  $n \rightarrow \infty$

$$\Pi = \lim P^n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1, \dots, \pi_N) = \mathbf{e} \boldsymbol{\pi}.$$

Επειδή  $\mathbf{Q} = P^T$  για  $n \rightarrow \infty$  θα έχουμε επίσης:

$$\lim \mathbf{Q}^n = \lim (P^T)^n = (\lim P^n)^T = (\mathbf{e} \boldsymbol{\pi})^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{e}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_N \end{pmatrix} (1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_1 & \dots & \pi_1 \\ \pi_2 & \pi_2 & \dots & \pi_2 \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \pi_N & \pi_N & \dots & \pi_N \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο τελευταίος πίνακας είναι στοχαστικός έπειτα ότι  $N \pi_i = 1$  ( $i=1, \dots, N$ ), δηλαδή η κατανομή ισορροπίας του στοχαστικού πίνακα  $P$  (όπως και του  $\mathbf{Q}$ ) είναι η Ομοιόμορφη.