• Μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega \cancel{t}} = 1.}$$

• Αυτό συνοψίζει την Αρχή της Απροσδιοριστίας.

Ανάλυση Σήματος

25/06/2007
(1/7)

$$\boxed{\delta_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nt)}{\pi t} = \delta(t)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t)\, d\omega + j\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t)\, d\omega}^{\,0} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{+n} \cos(\omega t)\, d\omega = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sin(nt)}{t} = 2\pi\delta(t).$$

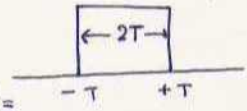
$$\left.\begin{aligned} f(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}\right\} \text{Μετασχ. } \mathcal{F}$$

- Για $f(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$
- Για $f(t) = 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\,\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

  άρτια.

Άρα αν $f(t) = 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega)$

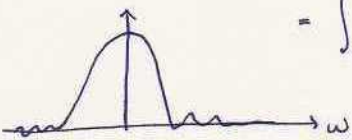
Έστω μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός:



$$P_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_T(t) = e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{-j\omega} = \frac{-2j\sin(\omega T)}{-j\omega} =$$

$$= \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$



Ανάλυση Σήματος

• $e^{-\alpha t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ (Gaussiανή)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2 - j\omega t}\, dt .$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\alpha t^2 + 2\frac{(-j\omega)}{2} t\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{-j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{-j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} \right) dt = \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\alpha}t - \frac{-j\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} dt \cdot e^{(-j\omega)^2/4\alpha}\, dt \right] =$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) = e^{(-j\omega)^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{(-j\omega)^2/4\alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha} \quad \text{(Ενιένς Gaussiανή)}$$

Άρα

$$\boxed{e^{-\alpha t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\omega^2/4\alpha}}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \Leftrightarrow I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

(καρτεσιανό)

Ανάλυση Σήματος

25/06/2007
(317)

Πηγαίνω στις πολικές: $x^2+y^2=r^2$

$$\Leftrightarrow I^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\,dr\,d\vartheta = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr$$

$$\Leftrightarrow I^2 = \cdots = \pi \quad \Leftrightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}}$$

* ——————————— *

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) : X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\omega = 2\pi f$$

- $X(f) = \mathcal{F}^1[x(t)]$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, d(2\pi f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df.$$

μεταβλητή

- $$\mathcal{F}^2[x(t)] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}[x(t)]\right] = \mathcal{F}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{-j2\pi f t}\, df =$$

$$= x(-t).$$

<u>Άρα</u> $\mathcal{F}^2[x(t)] = x(-t)$

* ——————————— *

$$\cdot\ \mathcal{F}^3[x(t)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^2[x(t)]] = \mathcal{F}[x(-t)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\, e^{j2\pi y f}\, dy =$$

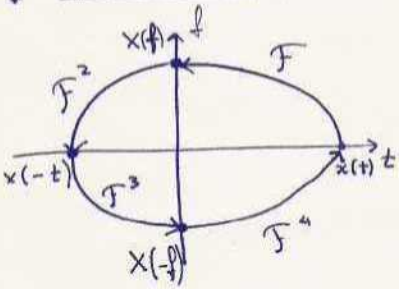
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\, e^{-j2\pi(-f)y}\, dy = X(-f).$$

Άρα $\boxed{\mathcal{F}^3[x(t)] = X(-f)}$

$$\cdot\ \mathcal{F}^4[x(t)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^3[x(t)]] = \mathcal{F}[X(-f)] = x(t).$$

Άρα $\boxed{\mathcal{F}^4[x(t)] = x(t)}$

Προκύπτει :



Ιδιότητες Μετασχηματισμού $\mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} * \; f_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_i(\omega) \\ * \; \sum f_i(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum F_i(\omega) \end{array}\right\} \text{Γραμμικότητα}$$

$$* \; f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} F(\omega) \Big\} \text{ Ολίσθηση στο χρόνο}$$

Απόδειξη

$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(\underbrace{t-t_0}_{y})dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega(y+t_0)} f(y)dy =$$

$$= e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega y} f(y)\, dy}_{F(y)}$$

$$* \; \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$

(1) Ισχύει $\quad 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

(2) Επίσης ισχύει η ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα.

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\omega_0)$$

Από τα (1),(2) έχουμε:

$$(1) \rightarrow \quad 1 \cdot e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$
$$1\, e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

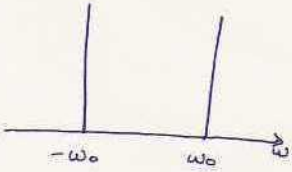
Άρα:

$$\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right].$$

Ανάλυση Σήματος

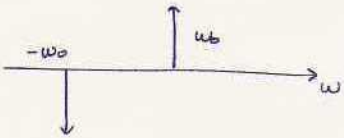
25/06/2007
(6/7)

Μετά το μετασχηματισμό προκύπτει σχηματικά



*Όμοια για το $\sin(\omega_0 t)$ προκύπτει:

$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

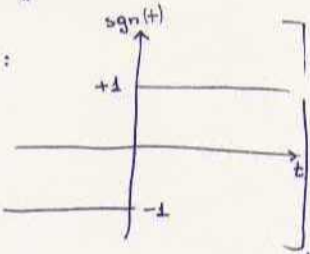


* ——————————— *

Π.χ.

$$\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$$

* [sgn(t) :



] *

Απόδ.

$$F\left[\mathrm{sgn}(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} + j\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right] d\omega$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega}_{\text{ολοκληρωτικό υπόλοιπα.}} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0. \end{cases}$$

* ——————————— *

Ανάλυση Σήματος

25/06/2007
(7/7)

* $f(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$ } Κλιμάκωση στο χρόνο.

• $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\, 2\pi\, \delta(\omega) +$

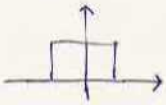
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

• $e^{j\omega_0 t}\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{j(\omega-\omega_0)}$

* $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) \Rightarrow F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$ } Συμμετρία

π.χ.

$$\underbrace{P_T(t)}_{f(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}}_{F(\omega)}$$



$$\frac{2\sin(tT)}{t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, P_T(\omega) = 2\pi\, P_T(\omega)$$

* $\overline{f}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F}(-\omega)$ } Μιγαδική συζυγία

* $\frac{d^n f}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)$ } Παραγώγιση στο χρόνο

• Παραγώγιση : $\dfrac{d^n f}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)$

• Παραγώγιση στη συχνότητα: $(jt)^n f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$.

• Ολοκλήρωση : $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \Rightarrow \dfrac{d\Phi}{dt} = f(t) \Longrightarrow j\omega\Phi(\omega) = F(\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}} \quad \omega \neq 0$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

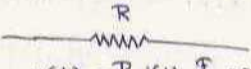
Για να συμπεριλάβουμε και το $\omega = 0$: $\boxed{\Phi(\omega) = \dfrac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)}$

• Συνέλιξη : $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau\right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(\underbrace{t-\tau}_{y})\,dt\right] d\tau$$

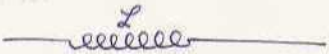
$$e^{-j\omega y} e^{-j\omega\tau}$$

• 

$u(t) = R\,i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} V(\omega) = R\,I(\omega) \Rightarrow \dfrac{V(\omega)}{I(\omega)} = R = Z_R$

Δ σύνθετη αντίσταση.

Στο χώρο των συχνοτήτων, ίδια με R.

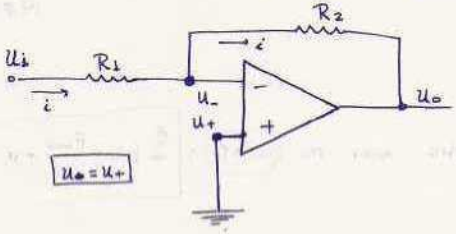
- 

$$u(t) = \mathcal{L}\frac{di}{dt} \Rightarrow V(\omega) = \mathcal{L}(j\omega)I(\omega) \Leftrightarrow \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = j\omega\mathcal{L} = Z_{\mathcal{L}}$$

- 

$$q = Cu \Rightarrow u = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

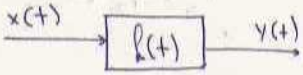
$$V(\omega) = \frac{1}{C}\cdot\frac{I(\omega)}{j\omega} \Rightarrow \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C$$

- 

Έχουμε : $\dfrac{u_i - \cancel{u_-}^{\,0}}{R_1} = i = \dfrac{\cancel{u_-}^{\,0} - u_o}{R_2} \Leftrightarrow u_o = -\dfrac{R_2}{R_1}u_i \Rightarrow V_o(\omega) = -\dfrac{R_2}{R_1}\cdot V_i(\omega)$

$$H(\omega) \equiv \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

συνάρτηση μεταφοράς

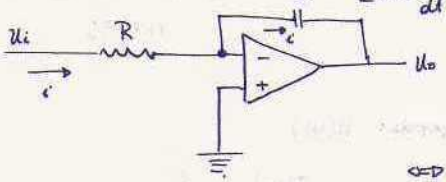


$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$$

$$\mathcal{F} \quad \boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$$

• $H(\omega) \equiv \dfrac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = -\dfrac{R_2}{R_1}\cdot 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -\dfrac{R_2}{R_1}\delta(t) \equiv h(t)$

Παράδειγμα (Ολοκληρωτής) $*\left[\begin{array}{l} q = Cu \\ i = C\dfrac{du}{dt}\end{array}\right]*$



$$\frac{u_i - 0}{R} = C\,\frac{d(0-u_o)}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_i(\tau)\,d\tau \xRightarrow{\mathcal{F}}$$

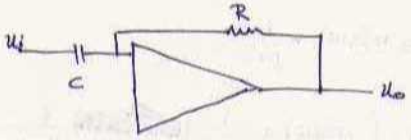
$\omega \neq 0$

$$\Rightarrow V_o(\omega) = -\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{j\omega}V_i(\omega) \Rightarrow \underbrace{\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}}_{H(\omega)} = -\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{j\omega}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[H(\omega)\right] = -\frac{1}{RC}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2RC}\,\mathrm{sgn}(t)$$

Άρα $\boxed{h(t) = \dfrac{1}{2RC}\,\mathrm{sgn}(t)}$ ⇒ Κρουστική απόκριση

Παράδειγμα (Διαφοριστής)



$*$ [Επίσης αντί για R, να βάλουμε $\mathcal{L}$] $*$

Παράδειγμα

• Έστω σύστημα: $\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) \quad , \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$y(t) = ;$ όταν $x(t) = u(t)$ $\Big\}$ $y(t) = \hat{R}[u(t)]$

$y(t) = ;$

• Βρίσκω τη συνάρτηση μεταφοράς: $H(\omega)$

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2+j\omega} = H(\omega)$$

$$\left[e^{-\alpha t} u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t}\,dt = \right.$$

$$= \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$\left. \text{(Αιτιατό)} \right]_*$$

Άρα $e^{-2t} u(t) = h(t)$

Ισχύει: $x(t) = u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot e^{-2t} u(t) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) \frac{1}{2+j\omega} =$$

$$= \frac{\pi\delta(\omega)}{2+j\omega} + \frac{1}{j\omega(2+j\omega)} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{1/2}{j\omega} + \frac{-1/2}{2+j\omega}$$

$$* \left[f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \right]_*$$

Ανάλυση Σήματος

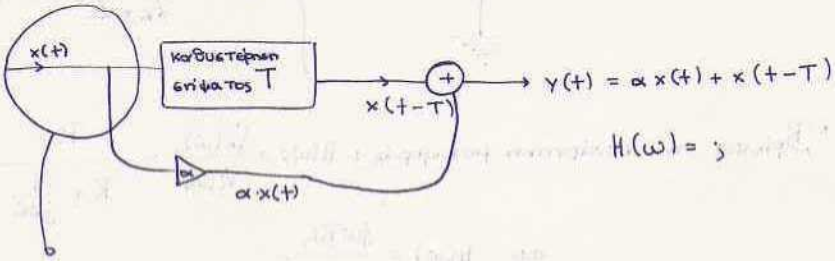
Άρα $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{2}\delta(\omega)\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2j\omega}\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j\omega}\right)\right]$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sgn}(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) \Leftrightarrow$$

$$* \begin{bmatrix} 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \\ \mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega} \end{bmatrix} *$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2}u(t)\left(1 - e^{-2t}\right)}$$, όταν $x(t) = u(t)$.

* ——— *



$H(\omega) = ;$

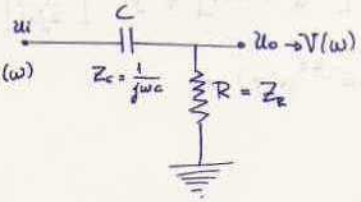
- δεν υπονοώ ότι σηάει το σήμα. Πηγαίνει το ίδιο και στους δύο κλάδους.

$$Y(\omega) = \alpha X(\omega) + e^{-j\omega T}X(\omega) \Leftrightarrow \qquad \left[H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right]$$

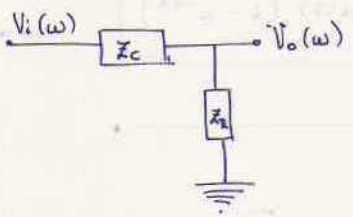
$$\Leftrightarrow \boxed{H(\omega) = \alpha + e^{-j\omega T}}$$

* ——— *

• <u>Διαφοριστής</u> : (Απλός)



<u>Άρα</u> (στο χώρο των συχνοτήτων έχουμε)



$$V_o(\omega) = \frac{Z_R}{Z_R + Z_c} V_i(\omega)$$

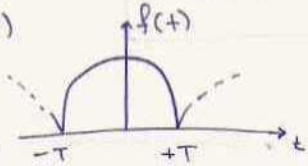
• Βρίσκω τη συνάρτηση μεταφοράς : $H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad H(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

• Για την κρουστική απόκριση : $\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = 1 - \frac{1}{1 + j\omega RC} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = 1 - \frac{1}{RC}\left(\frac{1}{1/RC + j\omega}\right) \Leftrightarrow \boxed{h(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)}$$

• $f(t) = P_T(t)\cos(\omega_0 t)$



$$g(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{g(t)}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{g(t)}{2} e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} G(\omega + \omega_0)$$

$$P_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(\omega t)}{\omega}$$

Άρα $f(t) = \dfrac{\sin(\omega-\omega_0)T}{(\omega-\omega_0)} + \dfrac{\sin(\omega+\omega_0)T}{(\omega+\omega_0)}$.

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \delta(t) - e^{-t}u(t) \\ h(t) &= e^{-2t}u(t) \end{aligned}\right\} \quad y(t) = ;$$

• $y(t) = x(t) * h(t)$ (Δύσκολο. Γι'αυτό πηγαίνουμε στο χώρο των ω)

• $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = 1 - \dfrac{1}{1+j\omega} = \dfrac{j\omega}{1+j\omega} = X(\omega)$

$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) = \dfrac{1}{2+j\omega}$

$$Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega) = \underbrace{\frac{j\omega}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{2+j\omega}}_{=F(\omega)} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{2+j\omega}$$

Για να βρω τα A,B πολ/ζω την (A) $F(\omega)\cdot(1+j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = A + \dfrac{B(1+j\omega)}{2+j\omega}\Big|_{j\omega=-1}$

$= \dfrac{j\omega}{2+j\omega}\Big|_{j\omega=-1} = A \Leftrightarrow \boxed{A=-1}$

(B) $F(\omega)(2+j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = \dfrac{A(2+j\omega)}{1+j\omega}\Big|_{j\omega=-2} + B \Leftrightarrow \dfrac{j\omega}{1+j\omega}\Big|_{j\omega=-2} = B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{B=2}$

$$Y(\omega) = -\frac{1}{1+j\omega} + \frac{2}{2+j\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) = -e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t) =$$
$$= u(t)\left(-e^{-t} + 2e^{-2t}\right).$$

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω σύστημα:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Rightarrow \boxed{H(\omega) = ;}$$

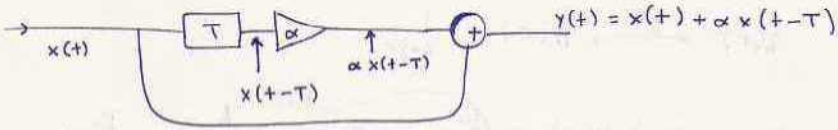
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega).$$

$$\bullet\ H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{M} a_k (j\omega)^k}$$

* ——— *

Παράδειγμα

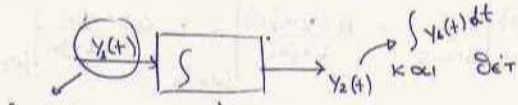
Έστω:



$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = X(\omega) + \alpha e^{-j\omega T} X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = 1 + \alpha e^{-j\omega T} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{\delta(t) + \alpha\delta(t-T) = h(t)}$$

Έστω ότι οδηγώ το σύστημα σε έναν ολοκληρωτή:



και θέτω $\alpha = -1$.

$h_1(t)$ $\quad h_2(t) \Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = \delta(t) \Rightarrow h_2(t) = u(t)$

Θέλω την έξοδο $y_2(t)$. Έχω $x_2(t) = y_1(t)$.

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = (\delta(t) - \delta(t-T)) * u(t) =$$
$$= \delta(t)u(t) - \delta(t-T)u(t) = \boxed{u(t) - u(t-T) = h(t)}.$$

Ανάλυση Σήματος

$$Y(\omega) = \frac{1-\omega^2-j\omega}{2-\omega^2+3j\omega} = 1 + \frac{A}{2-\omega^2+3j\omega} = 1 - \frac{1+2j\omega}{2-\omega^2+3j\omega}$$

(θέλω βαθμός αριθμητή < παρονομαστή)

$$2-\omega^2+3j\omega + A = 1-\omega^2+j\omega \Rightarrow A = -1-2j\omega$$

$$X(\omega) = \frac{1+2j\omega}{2+3j\omega+(j\omega)^2} = \frac{1+2j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{C_1}{1+j\omega} + \frac{C_2}{2+j\omega}$$

$$C_1 = X(\omega)(1-j\omega)\Big|_{j\omega=-1} = \frac{1+2j\omega}{2+j\omega}\Bigg|_{j\omega=-1} = -1.$$

$$C_2 = X(\omega)(2+j\omega)\Big|_{j\omega=-2} = 3.$$

• Άρα $X(\omega) = -\frac{1}{1+j\omega} + \frac{3}{2+j\omega}$. Άρα:

$$Y(\omega) = 1 - \left[-\frac{1}{1+j\omega} + \frac{3}{2+j\omega}\right] = 1 + \frac{1}{1+j\omega} - \frac{3}{2+j\omega} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow}$$

$$\delta(t) + e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

Συνέλιξη στη συχνότητα

$$f_1(t) f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$[f_1 f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega') \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, e^{-j(\omega-\omega')t} dt \right]}_{F_1(\omega-\omega')} d\omega' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega') \cdot F_1(\omega-\omega') d\omega' = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\cdot\, f_1 f_2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\rightarrow \mathcal{F}[f_1 f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t)\, e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega') F_2(\omega-\omega') d\omega'$$

$$\boxed{(\cdot \text{ για } \omega = 0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega') F_2(-\omega') d\omega'}$$

Θεώρημα του γινομένου

~~Θεώρημα Wiener-Khitchine~~

$\cancel{R_{12}(\tau) =}$

$$\rightarrow R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(t-\tau)\, dt = f_1 \star f_2 = f_1(t) * f_2(-t)$$

(γιατί $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$)

$$R_{12}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) F_2(-\omega)$$

<u>Αυτοσυσχέτιση</u>: $R_{11}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \cdot F_1(-\omega)$

Αν $f_1(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow F_1(-\omega) = \overline{F_1(\omega)} \Rightarrow R_{11}(\tau) = |F_1(\omega)|^2$

$$\boxed{R_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(\omega)|^2 e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Wiener - Khitchine.

Αν $f_1(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow F_1(-\omega) = \overline{F_1(\omega)}$

<u>Απόδειξη</u> : $\overline{F_1(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j(-\omega)t} = F_1(-\omega)$

Έστω : $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$ $\quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Συνέπεια

$$R_1(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} |F_1(\omega)|^2$$

$$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \Rightarrow |Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 H(\omega) \overline{H}(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

<u>Σημείωση</u> : $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \overline{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{j\omega t} dt =$

$t \to -\tau$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$h(-\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \overline{H}(\omega)$$

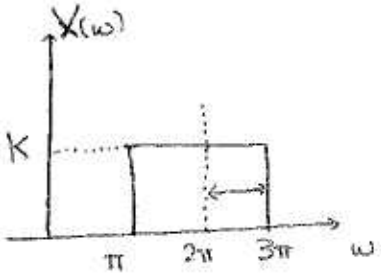
Θεώρημα Parseval (Η Θεώρημα της Ενέργειας)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (\omega = 2\pi f)$$

• Διαφορίζω: $dE = |F(f)|^2 df \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{df} = |F(f)|^2} \Rightarrow$ πυκνότητα Ενέργειας

* ——— *

Παράδειγμα: Έστω σήμα $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$



$$X(\omega) = k P_{\pi}(\omega - 2\pi)$$

Γνωρίζουμε ότι $E = 2$ (MeV). Ποιο είναι το σήμα.

Λύση

Βρίσκω πρώτα το k. Γνωρίζοντας το μετασχηματισμό $\mathcal{F}$. βρίσκω το σήμα.

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{3\pi} k^2 P_{\pi}^2(\omega - 2\pi) d\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{2\pi} k^2 \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2 = k^2 \Leftrightarrow \boxed{k = \sqrt{2}}$$

Ανάλυση Σήματος

Έχουμε για τον τετραγωνικό παλμό: $P_T(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \dfrac{\sin(Tt)}{\pi t}$

όπου $T = \pi$.

Άρα $P_\pi(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \dfrac{\sin(\pi t)}{t}$

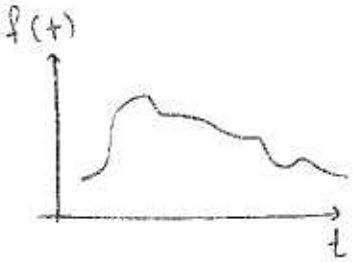
Άρα $X(\omega) = \sqrt{2}\, \underbrace{P_\pi(\omega - 2\pi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \sqrt{2}\, \dfrac{\sin(\pi t)}{t}}\, e^{j2\pi t} = x(t)$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολισθήσης στη συχνότητα.

* ——— *

Θεωρία

Έστω $f(t)$



$$(\Delta t)^2 = \langle (t - \langle t \rangle)^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2.$$

όπου: $\langle t^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$

$$\langle \omega^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 F(\omega)\, d\omega$$

• "Κεντράρω", ώστε $\langle t \rangle = 0$, $\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle}$ & $\Delta\omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle}$

• Χρησιμοποιώντας τη σχέση Schwartz προκύπτει για τη διακύμανση:

$$(\Delta t)(\Delta \omega) \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ (~ Αρχή της αβεβαιότητας)

Ανάλυση Σήματος

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \Rightarrow \quad F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$$

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(-jt)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\boxed{j\, F'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt}$$

• Η μέση τιμή είναι : $\langle t \rangle = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt} = \dfrac{j\, F'(0)}{F(0)}$.

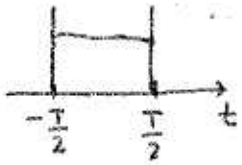
Άρα βρίσκω τη μέση τιμή παίρνοντας τους $\mathcal{F}$ στο 0.

* ———————— *

Ν.Σ.Ο : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\, dt = \frac{F^{(n)}(0)}{(-j)^n}$ (Με επαγωγή)

(βλ. επιπλέον ασκήσεις για άλλες εκφράσεις)

Σειρές Fourier



$$x(t+T) = x(t)$$

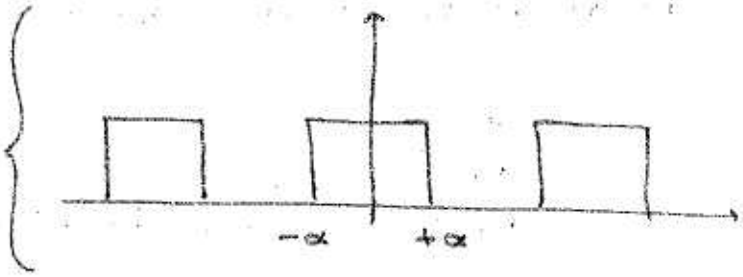
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad , \omega_0 = 2\pi/T \quad , C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0)}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

Παράδειγμα:

Τετραγωνικός παλμός
$x(t) = P_\alpha(t)$



Έχουμε: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \dfrac{2\sin(\alpha\omega)}{\omega}$.

Προσδιορίζω τους συντελεστές: $C_n = \frac{1}{T} X(n\omega_0) = \frac{1}{T} \frac{2\sin(\alpha n\omega_0)}{n\omega_0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{2\sin(\alpha n\, 2\pi/T)}{2\pi n}$$

Εκθετική μορφή αναπ. Fourier

Τριγωνομετρική μορφή αναπ. Fourier.

* ——— *

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right\}$$

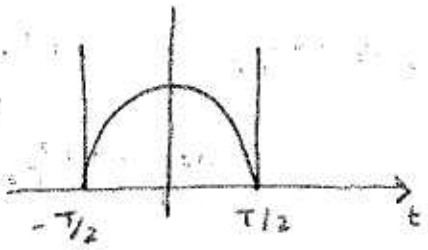
όπου: $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\,dt$

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \end{cases}$$

(a) Αν $x(-t) = x(t)$ άρτιο σήμα έχουμε:

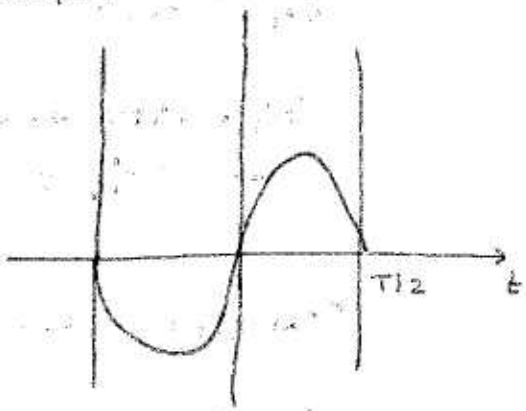
$$b_n = 0 \quad , \quad x(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$



(b) Αν $x(-t) = -x(t)$ περιττό σήμα έχουμε:

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$



* ——————————— *

<u>Άθροισμα Poisson</u>

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}\mathcal{F}_x(n\omega_0)$$

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega), \quad , \omega_0 = 2\pi/T$$

* ——————————— *

<u>Θεώρημα Parseval (Θεώρημα Ενέργειας)</u>

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = a_0 + \frac{1}{2}\sum_n \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Ανάλυση Σήματος

04/07/2007
(2/4)

Θεώρημα Γινομένου

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)\,x_2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (C_1)_n (C_2)_{-n}$$

$\downarrow$

Συντελεστές από εκθετικής μορφής σειρά Fourier

* ——————————— *

Παράδειγμα

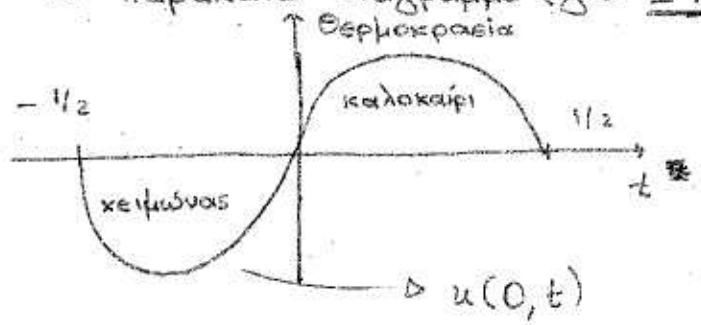
- $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ($u(x,t) \to$ ~~διάδοση θερμότητα~~ θερμοκρασία)

  $\hookrightarrow$ Διάδοση θερμότητας σε ένα υλικό (μονοδιάστατο πρόβλημα)

* [Κατ' αναλογία : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Κυματική εξίσωση
με $c = 1$] *

- Μελετάμε πώς διαδίδεται η θερμοκρασία στην επιφάνεια της Γης.

- Έχουμε το παρακάτω διάγραμμα (για 1 χρόνο (T=1) π.χ.)



* [Για $x = 0$ στην επιφ. Γης] *

* [Θεωρώ $u(x,0) = u(x,1) = 0$] *

Άρα : $u(x,t) = \sum C_n(x)\, e^{j2\pi n t}$

όπου $C_n = \int_0^1 u(x,t)\, e^{-j2\pi n t}\, dt$.

• Αρχικά υπολογίζω τους συντελεστές.

<u>Παραγωγίζω:</u> $$\frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} = \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} e^{-j2\pi n t}\, dt = \int_0^1 \underbrace{2\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{(Αρχική εξίσωση)}} e^{-j2\pi n t}\, dt.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} = 2\left[u(x,t)\, e^{-j2\pi n t}\right]_0^1 - 2\left[\int_0^1 u(x,t)\,(-2jn\pi)\, e^{-j2\pi n t}\, dt\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} = 2\left\{\cancel{u(x,1)e^{-2\pi n j} - u(x,0)}^{\,0}\right\} + 2\left\{2j\pi n\, C_n(x)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 C_n(x)}{\partial x^2} = 4j\pi n\, C_n(x)}$$

<u>Επιλύω:</u> $$\frac{d^2 C_n(x)}{dx^2} = \underbrace{\left[\sqrt{2\pi|n|}\,(1 \pm j)\right]^2}_{\omega} C_n(x) \quad \begin{cases} + & , n>0 \\ - & , n<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_n(x) = C_n(0)\, e^{-\omega x}$$

* [Απορρίπτω τη λύση $e^{+\omega x}$ γιατί είναι φυσικό πρόβλημα και στο $+\infty \to 0$.] *

$$\Leftrightarrow C_n(x) = C_n(0)\, \exp\left\{-\sqrt{2\pi|n|}\,(1 \pm j)\, x\right\}$$

<u>Άρα</u> $$u(x,t) = \sum C_n(0)\, e^{-\sqrt{2\pi|n|}\, x}\, e^{j\left[2\pi n t \pm \sqrt{2\pi|n|}\, x\right]}$$

και : $$C_n(0) = \int_0^1 u(0,t)\, e^{-j2\pi n t}\, dt.$$

Έχω έναν όρο ελάττωσης: $e^{-\sqrt{2\pi|n|}\, x}$

& την μετατόπιση φάσης: $\sqrt{2\pi|n|}\, x$

Λύση Σήματος

04/07/2007

• Έστω $u(0,t) = \sin(2nt)$. Τότε : $C_n(0) = \int_0^1 \sin 2nt\, e^{-j2nt}\, dt$ (3/4)

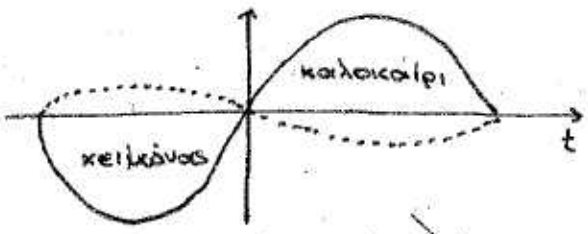
$$\frac{e^{j2nt} - e^{-j2nt}}{2j}$$

• Για $n = 1 \Rightarrow u(x,t) = e^{\sqrt{2n|n|}\,x} \sin\left(2nt - \sqrt{2n}\,x\right)$

• Έστω $\sqrt{2n}\,x = \pi \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (βάθος)

Τότε : $u\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, t\right) = e^{-\pi} \sin(2nt - \pi) = \underbrace{-e^{-\pi}}_{1/25} \sin(2nt)$

Συμπέρασμα :



Σε βάθος από την επιφάνεια η θερμοκρασία είναι περίπου σταθερή. (υπόγεια)