



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνείουπόλη - Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775

KΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 2017

«ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΙ»

**ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:**

Na δειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = e^{-|x|}$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης  $f''(x) - f(x) = -2\delta(x)$  με την έννοια των κατανομών. (1 μον.)

β) Δίνεται το ΠΑΤ:  $\begin{cases} P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \\ z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t), t \in I \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$  στο  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Na δειχθεί ότι

υπάρχει μοναδική λύση σε περιοχή του  $(x_0, y_0) = (x_0(t_0), y_0(t_0))$ ,  $t_0 \in I$  αν ισχύει

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0}{dt}(t_0) - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0}{dt}(t_0) \neq 0 \text{ όπου } z_0 = z_0(t_0). \quad (1 \text{ μον.})$$

γ) Na λυθεί το ΠΑΤ:

$$\begin{cases} x^2 z_x + y^2 z_y = z(x+y), \\ z = t^2 \text{ στην } x = t, y = 2t \end{cases} \quad (1 \text{ μον.})$$

**ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:**

Na λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = e^{-x_1^4 - x_2^4}, (x_1, x_2) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u_{x_2}(x_1, 0) = e^{-|x_1|} \sin(x_1), x_1 \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Η λύση να δοθεί σε ολοκληρωτική μορφή (2 μον.)

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:**

α) Na εξεταστεί αν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος των Cauchy-Kowalevsky και να βρεθεί

η μορφή της λύσης του ΠΑΤ  $\begin{cases} u_t = \cos u_x + u^2 \\ u(0, x) = xe^x \end{cases}$  γύρω από την αρχή του συστήματος

συντεταγμένων (έως δεύτερη τάξη στο ανάπτυγμα Taylor). (1.5 μον.)

β) Έστω ότι η συνάρτηση  $u(x)$  είναι αρμονική στο φραγμένο χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , συνεχής στο  $\bar{\Omega}$  με  $\partial\Omega$  ομαλό σύνορο. Na αποδειχεί η αρχή του μεγίστου για τη δοσμένη συνάρτηση. Na δειχθεί ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών Dirichlet για την εξίσωση Laplace έχει μοναδική λύση και ότι έχει συνεχή εξάρτηση από τα συνοριακά δεδομένα. φήμω τα τηλ. δισιτητελ / μεταναστεύει στο δρ. (2 μον.)

**ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:**

Δίνεται το ΠΑΤ:  $z^2 z_x + z_y = 0$ ,  $z(x, 0) = f(x)$ . α) Ποιά είναι η συνθήκη ύπαρξης (τοπικά) πάνω στην αριστερή μοναδικής λύσης β) Na βρεθεί η λύση για  $f(x) = x$ . γ) Na προσδιοριστούν αναλυτικά οι περιοχές που ορίζεται μοναδικά η λύση και οι περιοχές σοκ (αν υπάρχουν). (1.5 μον.)

Δίνεται η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace:

$$E(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]$$

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (1, 2, 2) \rightarrow dr = (1, 2, 2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 8\pi$$