

**Εξέταση στα «Μαθηματική Προτυποποίηση»,**  
**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**

Διδάσκων: I. Καραφύλλης

**Θέμα 1º:** (α) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό  $J(y) = \int_0^1 (10y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + 5\dot{y}^2(t))dt$  με περιορισμούς  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ . (β) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό  $J(y) = \int_0^1 (10y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + 5\dot{y}^2(t))dt$  με περιορισμούς  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$  και  $\int_0^1 y(t)dt = 1$ . (2 μονάδες)

**Θέμα 2º:** (α) Να δώσετε τις εξισώσεις ροής ενός ασυμπίεστου ρευστού με μηδενικό ιξώδες σε ένα χωρίο  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  (αγνοήστε την επίδραση της βαρύτητας). (β) Να δείξετε ότι αν υπάρχει λεία πραγματική συνάρτηση  $\phi(t, x, y, z)$  για την οποία ισχύει  $V = \nabla \phi$ , όπου  $V$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού, τότε ισχύουν οι εξισώσεις  $\Delta \phi = 0$  και  $\nabla \left( \phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} \right) = 0$ . (γ) Να δείξετε ότι αν υπάρχει λεία πραγματική συνάρτηση  $\phi(t, x, y, z)$  για την οποία ισχύει  $V = \nabla \phi$ , όπου  $V$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού, τότε υπάρχει συνάρτηση  $h(t)$  για την οποία ισχύει ότι  $\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{P}{\rho} = h(t)$ . (Θεώρημα Bernoulli-3 μονάδες)

**Θέμα 3º:** Έστω η διαφορική εξίσωση  $\ddot{y}(t) + y(t) + 4\varepsilon y^3(t) + 6(\varepsilon + \varepsilon^3) y^5(t) = 0$ , όπου  $\varepsilon > 0$  είναι μία σταθερά. (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $H(t) = \frac{1}{2} \dot{y}^2(t) + \frac{1}{2} y^2(t) + \varepsilon y^4(t) + (\varepsilon + \varepsilon^3) y^6(t)$  είναι σταθερή. (β) Να δώσετε τη προσέγγιση 1<sup>ης</sup> τάξεως της λύσης με αρχική συνθήκη  $y(0) = 1$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt (χρησιμοποιήστε τους τύπους  $\cos^5(x) = \frac{1}{16} \cos(5x) + \frac{5}{16} \cos(3x) + \frac{5}{8} \cos(x)$ ,  $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ ). (3 μονάδες)

**Θέμα 4º:** Έστω  $u(t, x)$  κλασσική λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών  $u_t(t, x) + c u_x(t, x) = k \int_0^1 u(t, s) ds$  για  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $u(t, 0) = 0$  για  $t \geq 0$  και  $u[0] = u_0$ , όπου  $c > 0$  και  $k \in \mathbb{R}$  σταθερές. Να δείξετε ότι αν υπάρχει σταθερά  $\sigma > 0$  τέτοια ώστε  $|k| < \frac{c\sigma^2}{2\sqrt{(\exp(\sigma)-1)(1-\exp(-\sigma))}}$  τότε  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\|u[t]\|_2) = 0$  (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το συναρτησιακό  $V(u) = \int_0^1 \exp(-\sigma x) u^2(x) dx$  και την ανισότητα Cauchy-Schwarz).

Καλή επιτυχία!