



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

ΣΕΜΙΦΕ 2007

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνείουπόλη - Ζωγράφος ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΤΗΛ.: 772 1774

FAX: 772 1775

1°) a) Εστω τ.μ.  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  και τ.μ.  $X$  αριθμίνες, σαν  $X_n = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Διώστε τον οριζόντιον των συγκέντρων σε δικεδύλια, μετα την άνοιξη,  $\lambda^2$ . Αναδιέξτε ότι το άριθμό είναι μονοάριθμος αριθμένος (για το λίθρο  $P$ ):

b) Διώστε τον οριζόντιον που μαρτίνει  $N$ ην σύγχρονο  $X_n \xrightarrow{\Delta} X$ . Είναι  $A \in \{B \in \mathcal{F}: P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A)\}$

(2°) b) Εστω τ.μ.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και  $E_1, E_2 \subset \mathcal{F}$  είναι μονοάριθμοι με  $A \in E_1$  και  $B \in E_2$ . Υποθέτουμε ότι τοπονομάριον των  $A, B$  είναι ανεξάρτητος

$$(*) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \forall A \in E_1 \text{ και } \forall B \in E_2$$

Δείξτε ότι  $n$   $(*)$  τοπονομάριον  $\forall A \in E_1$  και  $\forall B \in E_2$ .

3°) Εστω τ.μ.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Δείξτε ότι

(i) a) Αν  $\gamma$  είναι τ.μ. με την  $\mathbb{R}$  το σε μέρες είναι ηδοκεί  $\gamma(M) > M$  τότε  $P(|\gamma| > M) < \epsilon$

b) Αν  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  τ.μ. με την  $\mathbb{R}$  το σε μέρες ανορούσια αριθμίνες  $A_n > 0$  τότε  $\frac{X_n}{A_n} \rightarrow 0$

4°) Εστω  $X_1, X_2, \dots$  ανορούσια τ.μ. με την  $\mathbb{R}$  το σε μέρες με σ.π.η.  $f(x)$ ,  $x > 0$ . Θέτουμε  $A_n = \{w \in \Omega: \max_{k \leq n} X_k < X_n\}$  (μεταβιβώσουμε  $X_n$  σε γενικήτερη μάνια)

a) Δείξτε ότι τα  $A_n$  είναι αντιδιάμετροι μεταξύ των  $P(A_n) = \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Δείξτε ότι τα  $A_n$  πραγματοποιούνται ανεξάρτητα γιατί αν θυμήστε

(Υποδειγμα:  $\int \cdots \int f(u_1) f(u_2) \cdots f(u_n) du_1 \cdots du_n = \frac{1}{n!} \quad \text{με}$   
 $\{0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_n\}$

$$\int \cdots \int f(u_1) f(u_2) \cdots f(u_n) du_1 \cdots du_n = \frac{1}{n!} \quad \left( \begin{array}{l} \text{με} \\ \{0 < u_i < u_k \quad \forall i=1, \dots, n-1\} \end{array} \right)$$

$$P(A_n) = \int_{\Omega} \chi_{A_n} dP = \int_{\Omega} \chi_{A_n} dP = \int_{\Omega} \chi_{A_n} dP = \int_{\Omega} \chi_{A_n} dP$$

$$P(A_n) = \frac{1}{n!} P(\Omega)$$