

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
Συναρτησιακή Ανάλυση  
30-6-2008

Θέμα 1. (α).

- (i) Δώστε τον ορισμό της Hamel βάσης ενός διανυσματικού χώρου.
- (ii) Αν  $X, Y$  είναι διανυσματικοί χώροι,  $D$  Hamel βάση του  $X$  και  $g : D \rightarrow Y$  συνάρτηση, δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός  $T_g : X \rightarrow Y$ , γραμμικός, ώστε για κάθε  $x \in D$ ,  $T_g(x) = g(x)$ .

(β).

$\begin{array}{l} g : D \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x_1) = 1 \quad x_1 \in D \\ g(x_2) = 0 \quad x_2 \in D \\ \dots \\ g(x_n) = 0 \quad x_n \in D \end{array}$

(i) Έστω  $X$  απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμικός μη συνεχής. Έστω  $D$  μια Hamel βάση

Θέμα 2. (α) Έστω  $X$  χώρος με νόρμα και  $T : (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \rightarrow X$  ώστε  $\{T(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$  είναι φραγμένο υποσύνολο του  $X$ . Δείξτε ότι:

- (i) Ο  $T$  είναι φραγμένος.
- (ii)  $\|T\| = \sup\{\|T(e_n)\|_X : n \in \mathbb{N}\}$ .
- (β) Αν ο  $X$  έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, δείξτε ότι υπάρχει

$$T : (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1) \rightarrow X$$

που είναι 1-1, επί.

(γ) Δείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής

$$I : (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$$

δεν είναι φραγμένος.

Θέμα 3. (α) Δείξτε ότι ο  $\ell^1(\mathbb{N})$  είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

$$x_1 \in C \quad x_n = y_n$$

(β) Δείξτε ότι ο  $\ell^1(\mathbb{N})$  είναι ισομετρικός με τον  $c_0(\mathbb{N})^*$ .

Θέμα 4. (α) Έστω  $X$  χώρος με νόρμα,  $Y$  κλειστός υπόχωρος του  $X$  και  $x_0 \in X \setminus Y$ .

- (i) Αν  $x^* \in X^*$ , με  $\|x^*\| = 1$  και  $Y \subseteq \ker x^*$ , δείξτε ότι  $|x^*(x_0)| \leq d(x_0, Y)$ .
- (ii) Δείξτε ότι υπάρχει  $x^* \in X^*$  με  $\|x^*\| = 1$  και  $Y \subseteq \ker x^*$  ώστε  $x^*(x_0) = d(x_0, Y)$  όπου

$$d(x_0, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}.$$

(β) Έστω  $X$  διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$  πυκνό και  $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X^*$  ώστε

$$\|x_n^*\| = 1, \quad x_n^*(x_n) = \|x_n\|.$$

Δείξτε ότι  $\cap_n \ker x_n^* = \{0_X\}$ .

Θέμα 5. (α)

- (i) Δείξτε ότι ο  $C[0, 1]^*$  δεν είναι διαχωρίσιμος.
- (ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\delta_t : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1] (\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt)$$

είναι γραμμικό αλλά όχι συνεχές συναρτησιοειδές.

$$(β) \rho_K = \inf\{\lambda > 0 : \bigcup_{x \in K} \lambda x = \bigcup_{x \in K} x\}$$

- (i) Δώστε τον ορισμό του συναρτησιοειδούς Minkowski  $\rho_K$  για  $K \subseteq X$  με  $K$  κυρτό και  $0 \in K^\circ$ , και δείξτε ότι για κάθε  $x \in X$ ,  $\rho_K(x) < \infty$ .

- (ii) Δεχόμενοι ότι το  $\rho_K$  είναι θετικό υπογραμμικό, διατυπώστε και αποδείξτε το Θεμελιώδες διαχωριστικό θεώρημα.

Έστω  $(X, \|\cdot\|)$  και  $K$  κυρτό συσταντικό  $X$  τ.  $K \neq \emptyset$ ,  $x_0 \notin K$

$$\exists f \in X^* \text{ t.c. } f \neq 0 \text{ και } \sup_{x \in K} f(x) \leq f(x_0)$$