

**ΖΗΤΗΜΑ 1.** Έστω ότι θεωρούμε τη γλώσσα της προτασιακής λογικής (στην πολωνική γραφή) που περιέχει ως σύμβολα προτασιακών συνδέσμων μόνον τα  $\neg$  και  $\rightarrow$ . Δώστε τον επαγωγικό ορισμό των προτασιακών τύπων στην πολωνική γραφή σ' αυτή τη γλώσσα.

Λέμε ότι οι εκφράσεις  $\varphi$  και  $\psi$ , της ως άνω γλώσσας, είναι *συμβιβαστές* όταν είτε  $\varphi \equiv \psi$  ή η μία είναι αρχικό μέρος της άλλης. Αποδείξτε με επαγωγή στον αριθμό των συμβόλων ότι αν  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  είναι προτασιακοί τύποι και οι εκφράσεις  $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n$  και  $\psi_1\psi_2 \dots \psi_n$  είναι συμβιβαστές, τότε  $\varphi_i \equiv \psi_i$  για κάθε  $i \leq n$ . [Υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα ότι  $\varphi_1 \equiv \psi_1$ ]. Ακολούθως χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας για την ως άνω γλώσσα.

**ΖΗΤΗΜΑ 2.** Να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των tableaux, ότι ο προτασιακός τύπος  $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi$  είναι ταυτολογία. Με δεδομένο ότι κάθε σύνολο Hintikka προσημασμένων τύπων είναι ικανοποιήσιμο να εξηγήστε γιατί κάθε σύνολο προσημασμένων τύπων  $\Lambda$  που δεν είναι ικανοποιήσιμο έχει ένα κλειστό σημασιολογικό tableau.

Έστω  $\phi$  προτασιακός τύπος. Μπορούμε χρησιμοποιώντας το σύστημα ακολουθητικών του Gentzen να βρούμε τη συζευκτική κανονική μορφή του  $\phi$ ; Να περιγράψετε τη διαδικασία και να αποδείξετε ότι είναι σωστή.

**ΖΗΤΗΜΑ 3.** Ορίστε τι σημαίνει  $\Sigma \models \phi$  στον κατηγορηματικό λογισμό. Τι σημαίνει ότι το  $\Sigma$  είναι ικανοποιήσιμο; Αν το  $\Sigma$  δεν είναι ικανοποιήσιμο για ποια  $\phi$  έχουμε ότι  $\Sigma \models \phi$ ;

Ως γνωστόν  $\Sigma \vdash \phi$  σημαίνει ότι το  $\phi$  είναι θεώρημα της θεωρίας  $\Sigma$ . Διατυπώστε το θεώρημα της ορθότητας και πληρότητας για τον κατηγορηματικό λογισμό.

Διατυπώστε το θεώρημα της συμπάγειας. Αποδείξτε το θεώρημα της συμπάγειας χρησιμοποιώντας μόνον το θεώρημα της ορθότητας και πληρότητας.

**ΖΗΤΗΜΑ 4.** Πότε μια μεταβλητή είναι δεσμευμένη και πότε ελεύθερη; Πότε η μεταβλητή  $x$  είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο  $t$  στον τύπο  $\phi$ ; Δώστε το παράδειγμα ενός  $t$  και ενός  $\phi$  ώστε η  $x$  να μην είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο  $t$  στον τύπο  $\phi$  και ο τύπος  $\forall x\phi \rightarrow \phi(t)$  να μην είναι έγκυρος (αποδείξτε τη μη εγκυρότητα). Επίσης αποδείξτε την ύπαρξη ενός μη έγκυρου τύπου της μορφής  $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x\psi)$  όπου  $x$  είναι ελεύθερη στον  $\phi$ .

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 2.30 ώρες.

Καλή Επιτυχία!