

Θ Σ φ λογισμός: Σ: ικανοποιήσιμο (⇒) Σ: ητο. ικανοποιήσιμο.

$$\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n) \vee \phi$$

ΕΞΕΤΑΣΗ στη Μαθηματική Λογική, 29/08/2006

ΖΗΤΗΜΑ 1. Έστω Σ πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σύνολο προτασιακών τύπων (στον προτασιακό λογισμό) και φ προτασιακός τύπος. Αποδείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα της συμπάγειας, ότι αν το Σ, φ δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο τότε το Σ, ¬φ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συμπάγειας αποδείξτε ότι αν Σ ⊨ φ τότε υπάρχουν φ₁ ∈ Σ, φ₂ ∈ Σ, ..., φ_n ∈ Σ ώστε ¬φ₁ ∨ ¬φ₂ ∨ ... ∨ ¬φ_n ∨ φ είναι ταυτολογία.

ΖΗΤΗΜΑ 2. Πότε ένας τύπος του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού είναι λογικά έγκυρος; Αποδείξτε ότι οι τύποι

$$(\forall x(R(x) \rightarrow \forall xQ(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow Q(x)))$$

και

$$\forall x(R(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall xR(x) \vee \forall xQ(x))$$

δεν είναι λογικά έγκυροι [R και Q είναι κατηγορήματα μιας θέσεως]. Γιατί ο τύπος $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$ είναι λογικά έγκυρος;

ΖΗΤΗΜΑ 3. Πότε μια απονομή αλήθειας V επαληθεύει το ακολουθητικό φ₁, ..., φ_n ⊢ ψ₁, ..., ψ_m; Πότε το διαψεύδει; Πότε επαληθεύει το ακολουθητικό ⊢ φ και πότε το φ ⊢;

Χρησιμοποιώντας το αποδεικτικό σύστημα των ακολουθητικών του Gentzen αποδείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ (του προτασιακού λογισμού) υπάρχει ένας ισοδύναμος του σε διαζευκτική κανονική μορφή.

ΖΗΤΗΜΑ 4. Αποδείξτε ότι ο προτασιακός τύπος

$$(\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \psi)$$

είναι ταυτολογία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των σημασιολογικών tableaux. Τι προσπαθείτε γενικότερα να κατασκευάσετε για να αποδείξετε με τη μέθοδο των tableaux ότι ένας προτασιακός τύπος φ είναι ταυτολογία; Εξηγήστε γιατί αν ένα σύνολο Λ προσημασμένων προτασιακών τύπων δεν είναι ικανοποιήσιμο τότε υπάρχει για το Λ ένα κλειστό σημασιολογικό tableau.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 2.30 ώρες.

Καλή Επιτυχία!

(Laitas ✓)

Σ φ ο
το ικανο

R είναι (ομο)

to AS

φιλάχνουμε το δέντρο του ⊢ φ