

# Γραμμικά μοντέλα και σχεδιασμοί

Ιούλιος 2007

- Θέμα 1** α) Τέσσερεις ηχολήπτες (στήλες) και τέσσερα μικρόφωνα (γραμμές) χρησιμοποιούνται στη μελέτη πιθανών διαφορών στην μείωση των θορύβων ηχογράφησης με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών φίλτρων (λατινικά γράμματα). Για τη μελέτη του πειράματος χρησιμοποιήθηκε το παρακάτω λατινικό τετράγωνο τάξης 4, και μετρήθηκε ο θόρυβος σε κάθε πειραματική εκτέλεση.

Μικρόφωνο	Ηχολήπτης			
	1	2	3	4
1	A 20	B 25	D 19	C 24
2	D 22	C 25	A 19	B 26
3	B 14	D 12	C 15	A 15
4	C 16	A 14	B 20	D 18

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων και να εξαχθούν συμπεράσματα ( $\alpha = 0.05$ ). (Δίνεται  $F_{(3,6,0.05)} = 4.76$ )  
ii) Να χωριστούν οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα 'Μικρόφωνο' σε ομάδες με τη μέθοδο του Duncan. (Δίνονται  $r_{0.05}(2,6) = 3.46$ ,  $r_{0.05}(3,6) = 3.58$ ,  $r_{0.05}(4,6) = 3.64$ ).  
iii) Να δοθούν 95 % διαστήματα εμπιστοσύνης για τους μέσους του παράγοντα 'φίλτρο'. (Δίνεται  $t_{(6,0.025)} = 2.447$ )
- β) Έστω ένας  $(v, b, r, k, \lambda)$  BIB σχεδιασμός. Να αποδείξετε ότι η διασπορά των intrablock εκτιμητριών ( $\hat{\tau}_i$ ) των κυρίων επιδράσεων  $\tau_i$  των  $i$  αγωγών είναι:

$$V(\hat{\tau}_i) = \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2$$

$$\text{όπου } \hat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda v} Q_i.$$

- Θέμα 2** α) Θεωρούμε τις παρακάτω ορθογώνιες αντιθέσεις:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\bar{Y}_4 + \bar{Y}_5, \\ C_2 &= \bar{Y}_1 + \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4 - \bar{Y}_5, \\ C_3 &= \bar{Y}_1 - \bar{Y}_3, \\ C_4 &= -\bar{Y}_1 + 4\bar{Y}_2 - \bar{Y}_3 - \bar{Y}_4 - \bar{Y}_5, \end{aligned}$$

που ορίζονται στους μέσους των αγωγών πέντε τυχαίων δειγμάτων μεγέθους  $n_i = 5$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Να ελέγξετε τις παρακάτω υποθέσεις:

$$\begin{aligned} H'_0 &: -\mu_4 + \mu_5 = 0 \\ H''_0 &: \mu_1 + \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 = 0 \\ H'''_0 &: \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ H''''_0 &: -\mu_1 + 4\mu_2 - \mu_3 - \mu_4 - \mu_5 = 0 \end{aligned}$$

$k+9+X+X+X$   
 $5 \times 5$   
pq

σε σ.σ. 5%, χρησιμοποιώντας τα εξής αποτελέσματα:  $\bar{Y}_1 = 49$ ,  $\bar{Y}_2 = 77$ ,  $\bar{Y}_3 = 88$ ,  $\bar{Y}_4 = 108$ ,  $\bar{Y}_5 = 54$  και  $SS_{total} = 636.96$ . (Δίνεται  $F_{(1,20,0.05)} = 4.35$ ).

- β) Θεωρούμε το μοντέλο ανάλυσης διασποράς με δύο παράγοντες, μικτών επιδράσεων:  $Y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} + e_{ijk}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Να δείξετε ότι:

$$E(MSA) = \sigma^2 + r\sigma_{a\beta}^2 + \frac{qr \sum_{i=1}^p a_i^2}{p-1}.$$

$$\bar{y}_{..k} \pm \sqrt{\frac{MSA}{4}} t$$

**Θέμα 3** α) Ένας μηχανικός μελετά την απόδοση μιας διαδίκασίας. Υπάρχουν δύο μεταβλητές που ενδιαφέρουν, ο χρόνος αντίδρασης (A) και η ύφεμοχρασία της αντίδρασης (B). Εκτελείται ένας  $2^2$  σχεδιασμός με πέντε κεντρικά σημεία. Τα αποτελέσματα είναι:

Συνδυασμός Αγωγών	Παραγοντική Επίδραση		Απόκριση	Κεντρικά σημεία	Απόκριση
	A	B		(0,0)	
(1)	-	-	58.9	(0,0)	60.2
a	+	-	60.5	(0,0)	60.4
b	-	+	60.1	(0,0)	60.6
ab	+	+	61.2	(0,0)	60.5
				(0,0)	60.3

1  
/4

Να κάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν οι παράγοντες A, B καθώς και η αλληλεπίδραση τους AB είναι σημαντικοί. Είναι η καμπυλότητα σημαντική; (Δίνεται ότι  $F(1, 4, 0.05) = 7.71$ ).

β) Θεωρούμε το μοντέλο παλινδρόμησης:  $\underline{y} = X\underline{\beta} + \varepsilon$ , που αντιστοιχεί σε έναν  $2^k$  παραγοντικό σχεδιασμό. Αν  $\hat{\beta}$  είναι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του  $\beta$  να δείξετε ότι:

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n} I_n.$$

$$\cancel{n-2}^{x-1} \quad (3)^2 : n-2^x$$

**Θέμα 4** α) Ένας μηχανικός ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις τριών παραγόντων (A: ταχύτητα κοπής), (B: σχήμα εργαλείου) και (C: γωνία κοπής) στην διάρκεια ζωής ενός εργαλείου. Επιλέχτηκε ένα  $2^3$  παραγοντικό πείραμα με δύο επαναλήψεις και οι συνδυασμοί των αγωγών με την απόκριση του πειράματος έχουν ως εξής:

Συνδυασμός αγωγών	Επανάληψη	
	I	II
(1)	22	31
(a)	32	43
(b)	35	34
(ab)	55	47
(ac)	44	45
(bc)	40	37
(abc)	60	50
	39	41

~~off 8 n=2  
c=3~~

16

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων για την εύρεση σημαντικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων.  
ii) Να δοθεί ο πίνακας ανάλυσης διασποράς. (Δίνεται  $F_{(1,8,0.05)} = 5.32$ ).  
iii) Να βρεθεί η διασπορά των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή αυτών. (Δίνεται  $t_{(8,0.025)} = 2.306$ ).  
β) Έστω ένας  $2^4$  παραγοντικός σχεδιασμός με 2 επαναλήψεις. Να βρείτε τις εκτιμήτριες των επιδράσεων A, AB, CD, ACD καθώς και τη διασπορά τους.

Διάρκεια εξέτασης 2:30 ώρες

$$\sum_{n_c=2}^{n-2} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

$$2 \cdot 2^3 = 16$$

$$2 \cdot 2^2 = 8$$

$$x \pm \sqrt{x} \cdot t$$

$$\sqrt{n-2} \cdot t_{n-2, 0.025}$$