



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....**

Ψ/S Θεμάτα

Θέμα 1 (α) Έστω (f_ν) ακ ολουθία συναρτήσεων ορισμένων πάνω στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε $|f_\nu(x)| \leq \varepsilon_\nu$, $\forall x \in A$, όπου $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \varepsilon_\nu = 0$. Δείξτε ότι η (f_ν) συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση πάνω στο A .

(β) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων

$$(i) f_\nu(x) = x^\nu, x \in [0, 1], \quad (ii) g_\nu(x) = \frac{\sin^2(\nu x)}{\nu + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 2 (α) Βρείτε τη Maclaurin σειρά της συνάρτησης $f(x) = \text{Arc tan } x$, $x \in \mathbb{R}$ και το

ακριβές διάστημα σύγκλισης αυτής. Δείξτε ότι $\frac{\pi}{4} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^\nu \frac{1}{2\nu+1}$.

(β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}, \quad (ii) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Θέμα 3 (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{|x| |y^2|}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$

(β) Δίδεται η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} x \ln(x^2 + y^2), & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Δείξτε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει σε κάθε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και ότι είναι ασυνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

Θέμα 4 Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$f(x, y, z) = x^2 + \ln(1+y) + e^z - e = 0, \quad g(x, y, z) = e^x - y + z - 2 = 0$$

ορίζουν πεπλεγμένα σε περιοχή του σημείου $(0, 0, 1)$ μοναδική καμπύλη που διέρχεται από το σημείο αυτό. Βρείτε το εφαπτόμενο διάνυσμα και το κάθετο επίπεδο της καμπύλης στο εν λόγω σημείο.

Θέμα 5 Η συνάρτηση $T(x, y, z) = x - 4y + 6z$ δίνει την θερμοκρασία στα σημεία του ελλειψοειδούς $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της T .

Διάρκεια Εξέτασης 3 ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ