ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2η Σειρά Ασκήσεων στη "Μαθηματική Ανάλυση Ι"

ακαδ. έτος 2015–16

1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$. Αν $k, n \in \mathbb{N}^*$, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} n \left[\sum_{i=1}^{k} f\left(a + \frac{i}{n}\right) - kf(a) \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(a)\,.$$

2. Έστω η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 4x - 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\,. \end{cases}$$
Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη μόνο για $x = 1/2$ με $f'(1/2) = 4$.

3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
$$|f(y) - f(x)| \le C|y - x|^\alpha\,,$$
για κάποιο $C > 0$ και $\alpha > 0$.
   (α′) Αν $\alpha > 1$, δείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επομένως η f είναι σταθερή.
   (β′) Αν $0 < \alpha \le 1$, τότε η f μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη. Πράγματι, αν $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, δείξτε ότι
$$||y|^\alpha - |x|^\alpha| \le |y - x|^\alpha\,,$$
   για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και ότι η $f(x) = |x|^\alpha$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή $f \in C^2([a,b])$. Αν η f έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο $[a,b]$, δείξτε ότι η εξίσωση
$$f(x) + f''(x) = 2f'(x)$$
θα έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[a,b]$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Αν $g(x) := e^{-x} f(x)$, εξετάστε τις παραγώγους $g'(x)$ και $g''(x)$.

5. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, δείξτε ότι και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
<u>*Υπόδειξη*</u>. Κοιτάξτε την απόδειξη στο Παράδειγμα 3.41, "**Μαθηματική Ανάλυση Ι**(Μια εισαγωγή με παραδείγματα και ασκήσεις), Γ. Σαραντόπουλος ".

6. Με τον κανόνα L'Hôpital υπολογίστε τα όρια
$$(\alpha') \quad \lim_{x\to1} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}\,, \qquad (\beta') \quad \lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}\,.$$

7. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hôpital δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0\,, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0\,.$$
Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού $n \ge 1$.

8. (α′) Χρησιμοποιώντας τον τύπο Maclaurin για τη συνάρτηση $y = \sin x$, δείξτε ότι

$$|\sin x - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(β′) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $c > 0$, για κάθε $x > 0$ δείξτε ότι

$$|x^a \sin(x^{-c}) - x^{a-c}| \leq \frac{1}{6}x^{a-3c}$$

και υπολογίστε το όριο: $\lim_{x\to+\infty} x^a \sin(x^{-c})$. Εξετάστε τις περιπτώσεις (i) $a < c$, (ii) $a = c$ και (iii) $a > c$.

9. Η n-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 1/x^2$ στο $(0, \infty)$ είναι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (n+1)! x^{-(n+2)}\,, \qquad \forall x > 0\,.$$

(α′) Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor, με κέντρο το $x_0 = 1$, δείξτε ότι

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\,,$$

όπου το πολυώνυμο Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1)(x-1)^k$$

και το υπόλοιπο

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{n+2}{\xi^{n+3}} (x-1)^{n+1}\,, \quad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } 1\,.$$

(β′) Για κάθε $x \in (0, 1)$ δείξτε ότι

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{n+2}{x^2} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{n+1}\,.$$

(γ′) Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} |f(x) - P_n(x)| = 0$ και επομένως

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(x-1)^k\,.$$

Παράδοση των ασκήσεων έως 11/1/2016.