

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (2 μονάδες):

Α) Έστω Y τ.μ. με κατανομή που ανήκει στην ΕΟΚ με τύπο

$$f(y; \theta) = \exp\{a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)\}.$$

Σε συνθήκες κανονικής εκτίμησης να αποδείξετε ότι $E[a(Y)] = -\frac{c'(\theta)}{b'(\theta)}$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την $\frac{d}{d\theta} \int f(y; \theta) dy$). ✓

Β) Έστω η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο $\theta > 0$. Σε 50 παρατηρήσεις της X γνωρίζετε μόνο ότι οι 20 από αυτές είναι μηδέν. Βρείτε την Ε.Μ.Π. του θ χρησιμοποιώντας μόνο αυτό το δεδομένο.

ΘΕΜΑ 2 (2 μονάδες):

Α) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κατανομή Poisson με άγνωστη μέση τιμή $\lambda > 0$. Να προσδιοριστεί η κρίσιμη περιοχή του Ισχυρότατου Ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \lambda = \lambda_0$ με εναλλακτική $H_1: \lambda = \lambda_1$ ($\lambda_1 > \lambda_0$), σε ε.σ. α , όπου λ_0 και λ_1 γνωστές σταθερές. Χρησιμοποιήστε επίπεδο σημαντικότητας α .

Β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες Λήμμα Neyman-Pearson στη συνεχή μόνο περίπτωση.

ΘΕΜΑ 3 (3 μονάδες):

$$\frac{1}{\alpha} = \Theta \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\Theta}$$

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή $\theta > 0$.

(α) Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση, έστω T , για το θ .

(β) Να βρεθεί η μέση τιμή της $1/T$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Rao-Blackwell να βρεθεί ΑΕΕΔ για το $1/\theta$.

(δ) Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα του $1/\theta$ και να συγκριθεί με την διασπορά της ΑΕΕΔ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 4 (3 μονάδες):

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα ($μεγέθους > 4$) από την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $1/\theta$, όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

(α) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. $\hat{\theta}$ της παραμέτρου θ .

(β) Να βρεθεί η κατανομή της $\hat{\theta}$, θεωρώντας αρχικά την κατανομή της τ.μ. $Y = \theta \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(γ) Να βρεθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της $\hat{\theta}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας την κατανομή της τ.μ. $\frac{n\hat{\theta}}{\hat{\theta}}$ να κατασκευάσετε ένα συμμετρικό $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για το θ .

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Διάρκεια εξέτασης $2^{1/2}$ ώρες