



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ»

27 Ιουνίου 2018

A

ΘΕΜΑ 1^ο

- ✓ (A) Να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς γραμμικού μετασχηματισμού $f: V \rightarrow V$ είναι πραγματικές. *Μονάδες 1*
- ✓ (B) Να βρείτε ορθογώνιο πίνακα P που διαγωνοποιεί το συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{Μονάδες 1,5}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Να βρεθεί η εξίσωση ως προς τους κύριους άξονές της και το είδος της καμπύλης με εξίσωση στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxy:

$$2xy - 2x - 4y + 1 = 0. \quad \text{Μονάδες 2.5}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

- ✓ (A) Έστω τα πολυώνυμα $p(x) = x^2 - 8x + 15$ και $q(x) = x^2 - 11x + 28$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει 3×3 πίνακας A τέτοιος ώστε $p(A) = q(A) = \mathbf{0}$. *Μονάδες 0,7*
- ✓ (B) Έστω δύο $n \times n$ πίνακες A και B. Τι συμπεραίνεται αν αυτοί οι δύο πίνακες έχουν την ίδια μορφή Jordan $J_A = J_B$; *ιδιοτιμές = πολλαπλά διασπασίσεις* *Μονάδες 0.8*
- ✓ (Γ) Έστω δύο $n \times n$ πίνακες A και B για τους οποίους ισχύει $AB = BA$. Αν ο B είναι αντιστρέψιμος και λ_0 είναι μια απλή ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x_0 , να αποδείξετε ότι το x_0 είναι ιδιοδιάνυσμα και του πίνακα B. *Μονάδες 1*

✓ ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ο πίνακας $A(\omega) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -\omega+3 & \omega-1 & 3 \\ -\omega-2 & \omega+2 & -1 \end{bmatrix}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Για τις διάφορες τιμές του ω , να

βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του $A(\omega)$. Για τις τιμές του ω για τις οποίες ο $A(\omega)$ δεν διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας, να κατασκευαστεί πλήρως η κανονική μορφή Jordan του $A(\omega)$ και ο αντίστοιχος πίνακας ομοιότητας. *Μονάδες 2.5*

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!