

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης
3 Μαρτίου 2008

~~Θέμα 1~~ Δίνονται τα παρακάτω υποσύνολα του (\mathbb{R}^2, ρ_2)

$$B_1 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^+\}$$

$$B_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R \setminus \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Q}\}$$

$$B_3 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

$$B_4 = \{(x_1, x_2) : x_2 = ax_1 + \beta\} \quad (\text{όπου } a, \beta \text{ δυνθείσες σταθερές})$$

$$B_5 = \{(x_1, x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\}$$

i. Εξετάστε ποια από τα B_1, B_2 είναι πυκνά.

ii. Εξετάστε ποια από τα B_3, B_4, B_5 είναι ανοικτά ή κλειστά.

iii. Βρείτε τις κλειστότητες όλων των παραπάνω συνόλων.

~~Θέμα 2~~ (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ είναι συνεχής.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $K \subset \mathbb{R}^n$ και συνάρτηση $F : X \rightarrow K$ που να είναι ομοιομορφισμός διαχείρισα τα οπρια του X .

~~Θέμα 3~~ (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.

- i. Έστω $D \subset X$ και $\epsilon > 0$. Πότε το D καλείται ϵ -διαχωρισμένο;
- ii. Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε ϵ -διαχωρισμένο $D \subset X$ το D είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- iii. Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε ϵ -διαχωρισμένο $D \subset X$ το D είναι πεπερασμένο.

(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

- i. Κάθε ακολουθία στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
- ii. Κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.

Δείξτε ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή ο X είναι συμπαγής.

~~Θέμα 4~~ (α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι για $x \in X$ το ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Το x είναι σημείο συσσώρευσης του X .

ii. $\text{int}\{x\} = \emptyset$.

iii. $X \setminus \{x\}$ είναι πυκνό στον X .

(β) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος ώστε κάθε σημείο του να είναι σημείο συσσώρευσης και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Θέτουμε $I = X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία $(V_k)_k$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X ισχύει $(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k) \cap I \neq \emptyset$.

~~Θέμα 5~~ (α) Έστω $(f_n)_n \subset (C[a, b], \rho_\infty)$ και $f \in C[a, b]$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

i. Η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

ii. $f_n \xrightarrow{\rho_\infty} f$.

(β) Έστω $\mathcal{F} \subset (C[a, b], \rho_\infty)$.

i. Πότε η \mathcal{F} καλείται ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων;

ii. Αν η \mathcal{F} είναι ισοσυνεχής τότε δείξτε ότι και η $\overline{\mathcal{F}}$ είναι ισοσυνεχής.