

Μαθηματική Χρηματοοικονομική Θεωρία
 ΣΕΜΦΕ, 11-3-2008. Ομάδα Β

Θέμα 1. Εστω η στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, S\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$ και διαμέριση πληροφορίας $\delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_T\}$.

(i): Γράψτε τις εξισώσεις προϋπολογισμού και εξηγήστε τη φυσική σημασία τους. Εξηγήστε πώς προκύπτει ο υπόχωρος απολαβών από αυτές τις εξισώσεις και είσης εξηγήστε πως συνδέεται ο υπόχωρος απολαβών με την απουσία κερδοσκοπίας.

(ii): Άν δεν υπάρχει κερδοσκοπία, δείξτε ότι υπάρει αυστηρά θετικό διάνυσμα, ορθογώνιο στον υπόχωρο απολαβών.

Θέμα 2. Στην οικονομία του Θέματος 1, ποια είναι η άλγεβρα F_t που παράγεται από τη Δ_t και ποιες είναι οι μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς την F_t ? Αποδείξτε την απάντησή σας για το δεύτερο ερώτημα. Έσω $\Delta_t = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, $F_t =$

$$\begin{matrix} \rightarrow m_t = \\ \downarrow \\ \text{απόδειξη} \end{matrix}$$

Θέμα 3. (i) Περιγράψτε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) και

(ii) δώστε παράδειγμα ενός τέτοιου συμβολαίου 1000 τραπεζικών μετοχών όπου η τιμή της μετοχής την ημερομηνία εγγραφής του συμβολαίου είναι 50 ευρώ, το αρχικό περιθώριο ασφάλισης (initial margin) είναι 10%, το περιθώριο συντήρησης (maintenance margin) είναι 15% και στο συμβόλαιο αυτό ο επενδυτής νιοθετεί τη long position. Να παραστήσετε σε πίνακα την εξέλιξη της επένδυσης και τις απαραίτητες ενέργειες κατά τις 8 πρώτες ημέρες.

→ **Άσκηση 4.** Εστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμερίσεις πληροφορίας

$$\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}, \Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\},$$

$$\Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}.$$

Την ημέρα $t=0$ έχουμε δύο χρηματοοικονομικά συμβόλαια με αποδόσεις

$$V^1 = (0, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 2), V^2 = (0, 2, 3, 1, 3, 3, 4, 0, 1, 4, 1),$$

και τιμές

$$q^1 = (2, 1, 2, 3, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0), q^2 = (3, 2, 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Να γραφούν οι εξισώσεις προϋπολογισμού για τυχαία επένδυση z και τυχαίο αρχικό αγαθό w . Προσδιορίστε τον πίνακα αποδόσεων και εξετάστε αν στην αγορά υπάρχει κερδοσκοπία.

→ **Άσκηση 5.** Εστω μετοχή εξελίσσεται σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο σε διάστημα τεσσάρων χρονικών περιόδων $0, 1, 2, 3$ με αρχική τιμή $S_0 = 60$, συντελεστή ανόδου $u = 1.1$, συντελεστή καθόδου $d = 0.9$. Εστω δικαίωμα αγοράς W Ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στη μετοχή τη χρονική στιγμή 0 με τιμή $\epsilon_{\text{ξάσκησης}} = 55$ και ημερομηνία λήξης $T = 3$.

- (i) Να τιμολογήσετε το W τη χρονική στιγμή $t = 1$, και
(ii) προσδιορίστε χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης του W (από το μέρος του πωλητή του δικαιώματος).

Το σταθερό επιτόκιο μεταξύ δυό χρονικών περιόδων είναι $r = 0.02$.

~~Άσκηση 6.~~ Εστω στοχαστική οικονομία με σύνολο καταστάσεων με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, σύνολο χρονικών περιόδων $T = \{0, 1, 2, 3\}$ και διαμέριση πληροφορίας

$$\Delta_0 = \{S\}, \Delta_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}, \\ \Delta_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}, \Delta_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\},$$

διάνυσμα πιθανότητας $p = (\frac{1}{12}, \frac{4}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{12})$ και έστω το χρηματοοικονομικό συμβόλαιο $V = (0, 5, 4, 3, 2, 6, 2, 1, 0, 4, 3, 7)$ (ως προς τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης). Προσδιορίστε τη τιμή τη χονική στιγμή forward-start δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο V τη χρονική στιγμή 0, με ημερομηνία λήξης τη χρονική στιγμή 3, τιμή εξάσκησης $k = 1$ ως προς τη χρονική περίοδο 1.