



Ζήτημα 1<sup>ο</sup> Διατυπώστε και αποδείξτε το 2<sup>ο</sup> Λήμμα

Borel-Cantelli

B) Έστω ακολουθία τ.μ.  $X_n = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } a^n \\ 0 & \text{---} \quad 1-a^n \end{cases}, n=1,2,\dots$   
όπου  $a \in (0,1)$ . Δείξτε ότι  $X_n \xrightarrow{\text{σ.β.}} 0$

Ζήτημα 2<sup>ο</sup> Δώστε τους ορισμούς της σχεδόν βέβαιης σύγκλισης, της σύγκλισης κατά πιθανότητα και της  $L^r$  σύγκλισης ακολουθίας τ.μ.  $X_n, n \in \mathbb{N}$  σε τ.μ.  $X$

B) Έστω ακολουθία τ.μ.  $X_n, n \in \mathbb{N}$  με  $X_n \xrightarrow{\text{σ.β.}} 1$ . Δείξτε ότι  $E\left(\frac{X_n^2}{1+X_n^2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$ . Αφαιρέσει ότι  $\frac{X_n^2}{1+X_n^2} \xrightarrow{L^1} \frac{1}{2}$  ???

Ζήτημα 3<sup>ο</sup> Έστω χ.π.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και  $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$  ανεξάρτητα.

Υποθέτουμε ότι  $P(A_n) < 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και ότι  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

Δείξτε ότι  $P(\limsup A_n) = 1$ .

Ζήτημα 4<sup>ο</sup> Έστω χ.π.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και θέτουμε

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \text{υπάρχει } \underline{A} \in \mathcal{F} \text{ με } N \subset A \text{ και } \underline{P}(A) = 0\}$$

$$\mathcal{N}' = \{\Omega \setminus N : N \in \mathcal{N}\}$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$$

Δείξτε ότι η κλάση  $\mathcal{E}$  είναι  $\sigma$ -αλγεβρα.