

Γραμμικά μοντέλα και σχεδιασμοί

Οκτώβριος 2007

- Θέμα 1 α) Ένας γεωπόνος μελετά την απόδοση τεσσάρων τύπων λιπάσματος καλίου στην ανάπτυξη υβριδίων καλαμποκιού. Χρησιμοποίησε τέσσερις τύπους υβριδίων σαν μπλόκ και έχανε το πείραμα σύμφωνα με τον παρακάτω σχεδιασμό.

Αγωγή (τύπος λιπάσματος)	Τύποι			
	1	2	3	4
1	19	18		17
2		15	14	16
3	15	14	14	
4	12		13	14

- i) Να χάνετε τη στατιστική ανάλυση και να ελέγξετε αν ο τύπος λιπάσματος (αγωγές) είναι σημαντικός. (Δίνεται $F_{(3,5,0.05)} = 5.41$).
- ii) Να βρείτε τις *intrablock* εκτιμήτριες των επιδράσεων των αγωγών, και να χωρίσετε τους προσαρμοσμένους μέσους των αγωγών σε ομάδες με το κριτήριο του *Duncan* ($\alpha=0.05$). (Δίνονται $r_{0.05}(2,5) = 3.64$, $r_{0.05}(3,5) = 3.74$, $r_{0.05}(4,5) = 3.79$).
- iii) Να βρείτε τις *interblock* εκτιμήτριες των επιδράσεων των αγωγών.

- β) Να δείξετε ότι οι *intrablock* { $\hat{\tau}_i$ } και οι *interblock* { $\tilde{\tau}_i$ } εκτιμήτριες είναι ασυσχέτιστες.

- Θέμα 2 α) Μελετάται η επίδραση τεσσάρων διαφορετικών συστατικών (Λατινικά γράμματα) στο χρόνο αντίδρασης μιας χημικής διαδικασίας. Κάθε παρτίδα νέου υλικού (Γραμμές) έχει τέτοιο μέγεθος ώστε επιτρέπει να γίνουν τέσσερις μόνο εκτελέσεις. Επιπλέον, κάθε εκτέλεση απαιτεί περίπου 2 ώρες, ώστε σε μια μέρα μπορούν να γίνουν τέσσερις μόνο εκτελέσεις. Ο πειραματιστής αποφασίζει να εκτελέσει το πείραμα βασισμένο σε ένα λατινικό τετράγωνο, ώστε οι επιδράσεις της ημέρας (Στήλες) και της παρτίδας (Γραμμές) να ελέγχονται συστηματικά. Ο σχεδιασμός με τα αποτελέσματα του πειράματος (χρόνος αντίδρασης) φαίνονται παρακάτω:

Παρτίδα	Ημέρα			
	1	2	3	4
1	C 10	D 14	A 7	B 8
2	B 7	C 18	D 11	A 8
3	A 5	B 10	C 11	D 9
4	D 10	A 10	B 12	C 14

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων και να εξαχθούν συμπεράσματα ($\alpha = 0.05$). (Δίνεται $F_{(3,6,0.05)} = 4.76$).
- ii) Να χωριστούν οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα "συστατικά" σε ομάδες με τη μέθοδο του *Duncan*. (Δίνονται $r_{0.05}(2,6) = 3.46$, $r_{0.05}(3,6) = 3.58$, $r_{0.05}(4,6) = 3.64$).
- iii) Να δοθούν 95 % διαστήματα εμπιστοσύνης για τους μέσους του παράγοντα "παρτίδα". (Δίνεται $t_{(6,0.025)} = 2.447$).
- β) Έστω C και D είναι δύο ορθογώνιες αντιιθέσεις που ορίζονται στα αιθροίσματα των παρατηρήσεων ενός παράγοντα, με n επίπεδα και p παρατηρήσεις σε κάθε επίπεδο. ($C = \sum_{i=1}^v c_i y_i$, $D = \sum_{i=1}^v d_i y_i$). Να δείξετε ότι $Cov(C, D) = 0$.

Θέμα 3 α) Θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}$, $i = 1, \dots, v$, $j = 1, \dots, b$, που αντιστοιχεί σε έναν BIB σχεδιασμό με παραμέτρους (v, b, r, k, λ) . Να δείξετε ότι οι εκτιμήσεις ελαχίστων τετραγώνων των τ_i είναι: $\widehat{\tau}_i = \frac{k}{\lambda v} Q_i$.

β) Θεωρούμε το μοντέλο ανάλυσης διασποράς με δύο παράγοντες, τυχαίων επιδράσεων:

$$Y_{ijk} = \mu + a_i + \beta_j + (a\beta)_{ij} + e_{ijk},$$

όπου $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $k = 1, \dots, r$. Να δείξετε ότι:

$$E(MSA) = \sigma^2 + r\sigma_{a\beta}^2 + qr\sigma_a^2.$$

Θέμα 4 α) Μια βιομηχανία ελαστικών ενδιαφέρεται να μελετήσει τις επιδράσεις τριών παραγόντων (A : πάχος ελαστικού), (B : πίεση ελαστικών) και (C : ταχύτητα αντίδρασης οδηγού) για την κατασκευή βέλτιστων ελαστικών. Επιλέχτηκε ένα 2^3 παραγοντικό πείραμα με δύο επαναλήψεις και οι συνδυασμοί των αγωγών με την απόχριση του πειράματος έχουν ως εξής:

Συνδυασμοί αγωγών	Επανάληψη	
	I	II
(1)	1	2
(a)	3	1
(b)	2	1
(ab)	5	4
(c)	2	1
(ac)	5	2
(bc)	2	3
(abc)	6	6

- i) Να γίνει η ανάλυση των δεδομένων για την εύρεση σημαντικών επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων και να δοθεί ο πίνακας ανάλυσης διασποράς. (Δίνεται $F_{(1,8,0.05)} = 5.32$).
- ii) Να βρεθεί η διασπορά των εκτιμήσεων των κυρίων επιδράσεων καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή αυτών. (Δίνεται $t_{(8,0.025)} = 2.306$).
- β) Θεωρούμε το μοντέλο παλινδρόμησης: $\underline{y} = X\underline{\beta} + e$, που αντιστοιχεί σε ένα 2^k παραγοντικό σχεδιασμό. Να δείξετε ότι:

$$\widehat{\underline{\beta}}'\widehat{\underline{\beta}} - \bar{y}^2 = \frac{n-1}{n} S_y^2,$$

όπου S_y^2 η διασπορά των παρατηρήσεων y_i , για $i = 1, \dots, n$.

Διάρκεια εξέτασης 2:30 ώρες