

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**1η Σειρά Ασκήσεων στη “ Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση ”**

ακαδ. έτος 2008–09

1. Έστω  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  ένας χώρος μέτρου και έστω  $(A_n)$  ακολουθία μετρήσιμων συνόλων. Ως γνωστόν

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Αν  $\liminf A_n = \limsup A_n = A$ , θα λέμε ότι η ακολουθία  $(A_n)$  συγκλίνει στο  $A$  και θα γράφουμε  $\lim A_n = A$ .

- (α') Να αποδειχθεί ότι  $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ .  
 (β') Αν  $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) < \infty$ , τότε  $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$ .  
 (γ') Αν η ακολουθία  $(A_n)$  συγκλίνει και  $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) < \infty$ , τότε
- $$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

2. Έστω ο χώρος μέτρου  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ . Υποθέτουμε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο  $E \neq \emptyset$  είναι  $0 < \mu(E) < \infty$ . Για κάθε  $x \in X$  έστω

$$\alpha(x) = \inf \{ \mu(E) : E \in \mathfrak{M}, x \in E \}.$$

- (α') Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σύνολο  $A_x \in \mathfrak{M}$ , τέτοιο ώστε  $x \in A_x$  και  $\mu(A_x) = \alpha(x)$ .  
 (β') Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα  $\{A_x\}$  είτε είναι ίσα ή είναι ξένα μεταξύ τους.  
 3. Έστω  $E \subset \mathbb{R}$ , με  $m^*(E) < \infty$  και έστω  $I_1, I_2, \dots, I_n$  διαστήματα στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$m^* \left( E \Delta \bigcup_{k=1}^n I_k \right) < \infty.$$

Τότε, τα διαστήματα  $I_1, I_2, \dots, I_n$  θα πρέπει να είναι φραγμένα.

4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m^*(A) + m^*(B).$$

Υπόδειξη. Είναι γνωστό ότι αν τα σύνολα  $E, F \subseteq \mathbb{R}$  είναι Lebesgue μετρήσιμα, τότε

$$m(E \cup F) + m(E \cap F) = m(E) + m(F).$$

5. Έστω  $S \subset \mathbb{R}$  ένα φραγμένο σύνολο.

(α') Αν

$$f(x) := m^*(S \cap (-x, x)), \quad x \geq 0,$$

να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι αύξουσα και συνεχής.

(β') Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα  $I = (-x_0, x_0)$  (το 0 είναι το μέσο του διαστήματος), τέτοιο ώστε

$$m^*(S \cap I) = m^*(S \cap I^c) = \frac{1}{2} m^*(S).$$

Παρατήρηση. Επειδή για κάθε σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $m^*(A+x) = m^*(A)$ , η άσκηση 5(β') γενικεύεται ως εξής:

Κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι το μέσο ενός ανοικτού διαστήματος  $I$ , που είναι τέτοιο ώστε

$$m^*(S \cap I) = m^*(S \cap I^c) = \frac{1}{2} m^*(S).$$

6. Έστω  $C_a$ ,  $0 < a < 1$ , το γενικευμένο σύνολο Cantor. Υπάρχει ακολουθία διαστημάτων  $(J_n)$ , με  $\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) < \infty$ , τέτοια ώστε κάθε σημείο του συνόλου  $C_a$  να ανήκει σε άπειρο το πλήθος διαστήματα  $J_n$ ;
7. Έστω  $G$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $x \in [0, 1]$ , τέτοια ώστε

$$x = \frac{c_1}{5} + \frac{c_2}{5^2} + \cdots + \frac{c_n}{5^n} + \cdots,$$

όπου  $c_n = 0$  ή  $4$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Να αποδειχθεί ότι  $m(G) = 0$ .

---

Παράδοση των ασκήσεων έως 4/12/2008