

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

1. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = (0, 1]$ με μέτρο πιθανότητας P ορισμένο στα υποσύνολα Borel του Ω , έτσι ώστε $P\{(a, b]\} = b - a$. Θεωρούμε την ακολουθία των ενδεχομένων A_n , $n = 1, 2, \dots$, όπου

$$A_1 = (0, 1/2], \quad A_2 = (1/2, 1], \quad A_3 = (0, 1/3], \quad A_4 = (1/3, 2/3], \quad A_5 = (2/3, 1], \quad A_6 = (0, 1/4], \quad \text{κλπ}$$

Να προσδιοριστούν τα παρακάτω:

$$(a) \lim_n P(A_n), \quad (β) \liminf A_n, \quad (\gamma) \limsup A_n, \quad \text{και} \quad (\delta) \quad P(\limsup A_n).$$

Σχολιάστε πως σχετίζονται οι απαντήσεις σας για τα παραπάνω ερωτήματα (a) και (δ) με το 1ο Λήμμα των Borel-Cantelli.

2. Εστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Υποθέτουμε ότι $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$, και $A \cup B \neq \Omega$.

(α) Περιγράψτε την σ-άλγεβρα $\Sigma = \sigma(A, B)$, δηλ. την μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα A, B (Υπόδειξη). Θεωρείστε μια κατάλληλη διαμέριση του Ω σε τέσσερα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα E_1, E_2, E_3, E_4 .

(β) Αν $X \in \Sigma = \sigma(A, B)$, δηλ. αν η τ.μ. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα Σ , να περιγράψετε την γενική μορφή της τ.μ. X .

3. Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) .

(α) Αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\{X < r\} \in \mathcal{F},$$

για κάθε ρητό αριθμό r , δείξτε ότι η X είναι τ.μ.

(β) Αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ. δείξτε ότι η συνάρτηση $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

είναι τυχαίο διάνυσμα (δηλ. τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

4. Εστω ακολουθία τ.μ. X_n , $n = 1, 2, \dots$. Αν $X_n \rightarrow X$ σ.β. και υπάρχει τ.μ. Y , με $E[Y] < \infty$, τέτοια ώστε $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega$, δείξτε ότι

$$\lim_n E[X_n] = E[X].$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (χωρίς να το αποδείξετε) το Λήμμα του Fatou: Αν $Z_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, είναι ακολουθία τ.μ. και $Z_n \rightarrow Z$ σ.β. τότε

$$E[Z] \leq \liminf E[Z_n].$$

5. Αν για $n = 1, 2, \dots$, η τ.μ. X_n , είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (a_n, b_n) , να δώσετε (απλές) ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\{X_n\}$ κατά Νόμο. Επίσης, να προσδιορίσετε το όριο αυτό. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.