



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΒΟΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Πολυτεχνειούπολη - Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ: 772 1774

FAX: 772 1775

ΙΟΥΛΙΟΣ 2006 (10^ο, 12^ο...)1^ο) Έστω γ.π. (Ω, \mathcal{F}, P) και υποχώρημα $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$

2 Δείξτε ότι

α) $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$ β) $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$ 2^ο) Έστω γ.π. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ και ορίσουμε $F(t) = P((-\infty, t])$, $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η F είναι συνάρτηση κατανομής. Εν συνεχεία για τυχόν $a \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $P(\{a\}) = F(a) - F(a-)$.3^ο) Έστω ευγενής συνάρτηση $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ και \mathcal{F} σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω . Υποθέτουμε ότι η P ικανοποιεί τις παρακάτω κλασικές:

- ① $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}$
- ② $P(\Omega) = 1$
- ③ $\forall A_1, \dots, A_k$ αμοιβάτων \mathcal{F} τότε $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$ και $\forall A_n \in \mathcal{F}$ και $A_n \supset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_n P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

Να δείξετε ότι η P είναι μέτρο πιθανότητας.3^ο 4^ο) Έστω οικογένεια τ.μ. $X_n \sim U(a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ με $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$.α) Αν $a < b$ να δείξετε ότι $X_n \xrightarrow{D} X \sim U(a, b)$ β) Αν $a = b$ να δείξετε ότι $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ συρρέει κατά πιθανότητα.

$$U(a, b) : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$