: Εξέταση στη καθηκοντική λογική, 29/10/2020.

ΖΗΤΗΜΑ 1.:

Σ, ϕ: δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. => κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Σ: πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. => κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

Θα δείξουμε ότι αφού $\Sigma \cup \{\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο => $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπ. ικανοποιήσιμο. Έστω $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \neg\phi\}$ ένα πεπ. υποσύνολο του $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$. Επίσης, έστω $\{\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_l, \phi\}$ ένα πεπ. υποσύνολο του $\Sigma \cup \{\phi\}$. Αφού το $\Sigma \cup \{\phi\}$ δεν είναι πεπ. ικανοποιήσιμο τότε το $\{\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_l, \phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Όμως, αφού το Σ είναι πεπ. ικανοποιήσιμο => έπεται ότι $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_l\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Επομένως, υπάρχει αποτίμηση V: ικανή ώστε ότι $\bar{V}(\phi) = F \Rightarrow \bar{V}(\neg\phi) = T$. Επομένως, το σύνολο $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \neg\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. => Το $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ είναι πεπ. ικανοποιήσιμο.

→ Αφού $\Sigma \models \phi$ => έχουμε ότι για κάθε αποτίμηση V που ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους στο $\sigma \in \Sigma$ έχουμε $\bar{V}(\phi) = T$. Επομένως, το σύνολο Σ, ϕ είναι ικανοποιήσιμο => θ.Σ. έχουμε ότι Σ, ϕ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Συνεπώς υπάρχει αποτίμηση V έτσι ώστε κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του να ικανοποιείται. Έστω, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi\}$ ένα πεπ. υποσύνολό του. Επομένως, θα υπάρχει αποτίμηση V έτσι ώστε $\bar{V}(\phi_1) = \bar{V}(\phi_2) = \dots = \bar{V}(\phi_n) = \bar{V}(\phi) = T$ ενώ για τη υπόλοιπη όχι. Επομένως, $\bar{V}(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 \vee \dots \vee \neg\phi_n \vee \phi) = T$ για κάθε αποτίμηση V. Γιατί από κανόνες De Morgan έχουμε ότι $\neg\phi_1 \vee \dots \vee \neg\phi_n \equiv \neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)$. Επομένως, οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ => ικανοποιούν και το $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n$ και επομένως δεν ικανοποιούν το $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)$. Ενώ ικανοποιούν το ϕ. Ενώ, οι αποτιμήσεις που δεν ικανοποιούν το $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ ικανοποιούν την άρνησή του. ✱

ΜΕ ΑΠΟΤΟ

Παρατηρούμε ότι $\bar{V}(\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)) = T$ ή $\bar{V}(\phi) = F \Rightarrow \bar{V}((\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \vee \phi) = T$

$\bar{V}(\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n)) = F$ ή $\bar{V}(\phi) = T \Rightarrow \bar{V}(\neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n) \vee \phi) = T$.

ΖΗΤΗΜΑ 2

Ένας τύπος του πρωτοβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι λογικά έγκυρος αν και μόνο αν η πρόταση $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \phi$ είναι λογικά έγκυρη.

$\rightarrow (\forall x R(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x(\underline{R(x)} \rightarrow \underline{Q(x)})$.

με αντιπαράδειγμα:

$\Rightarrow \forall x(R(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x R(x) \vee \forall x Q(x))$.

Έστω, $A = \{a, b\}$ και $R = \{a\}$, $Q = \{b\}$.

Τότε το $\forall x(R(x) \vee Q(x))$ μας λέει ότι $\forall x$, το x μπορεί να είναι a ή b που αληθεύει ενώ το δεύτερο ότι $\forall x$ το x είναι a ή ότι $\forall x$ το x είναι b τώρα είναι ψευδής.

$\rightarrow$ λογικά έγκυρος: $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)$.

Από AS 4 έχουμε ότι $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \forall x \psi)$.

από Gen έχω ότι $\dfrac{\phi}{\forall x \phi}$

MP $\Rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)$.

ΖΗΤΗΜΑ 3).

Η αποτίμηση αλήθειας V επαληθεύει το ακολουθιακό $\phi_1, \dots, \phi_n \vdash \psi_1, \dots, \psi_m$ όταν $V(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) = T$, δηλαδή όταν για κάθε $\phi \in \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ισχύει $V(\phi) = T \Rightarrow$ υπάρχει $\psi \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ έτσι ώστε $V(\psi) = T$.

Το διαψεύδει όταν για κάθε $\phi \in \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, $V(\phi) = T$ και για κάθε $\psi \in \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, $V(\psi) = F$.

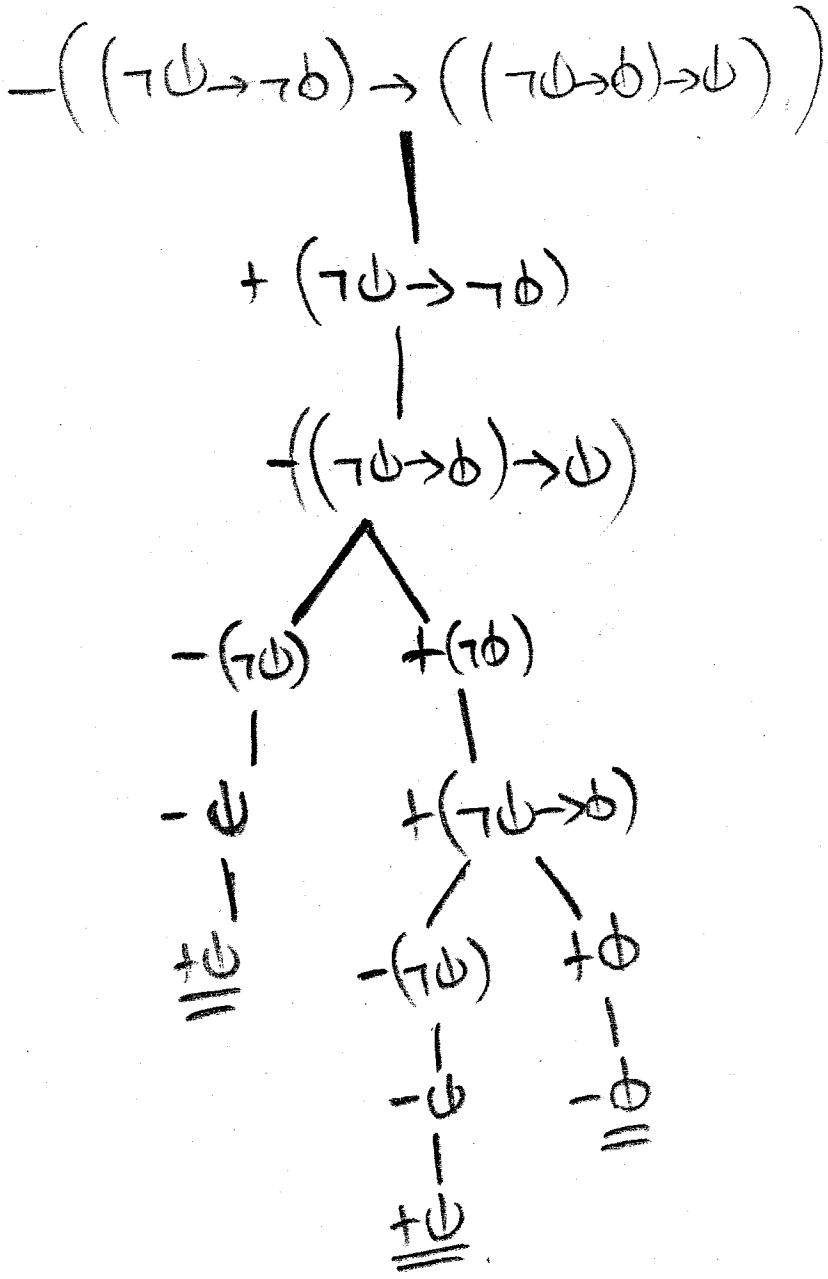
Το ακολουθιακό $\vdash \phi$ το επαληθεύει όταν $V(\phi) = T$.

Το ακολουθιακό $\phi \vdash$ το επαληθεύει όταν $V(\phi) = F$.

→ Έστω το ακολουθιακό $\phi \vdash$, όπου ϕ προτασιακός τύπος. Κατασκευάζουμε το απαρίθμητό δένδρο του ακολουθιακού $\phi \vdash$, αποκαταστήνοντας το ϕ σύμφωνα με τους κανόνες του Gentzen. Παίρνουμε τα φύλλα του απαριθμητού δένδρου του. Δεν είναι αξιώματα. Τα φύλλα θα είναι της μορφής $A_1, A_2, \dots, A_k \vdash A_1', A_2', \dots, A_l'$.

ΖΗΤΗΜΑ 4.

Θεωρούμε τον προβληματικό τύπο $-((\neg\psi \to \neg\phi) \to ((\neg\psi \to \phi) \to \psi))$ και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των συνταγματικών tableau έχουμε:



→ $\models \phi \Leftrightarrow$ για κάθε αποτίμηση V, έχουμε $\bar{V}(\phi) = T$.

Από τον ορισμό των προσημασμένων τύπων έχουμε ότι $\bar{V}(+\phi) = T \Leftrightarrow \bar{V}(\phi) = T$ και $\bar{V}(-\phi) = T \Leftrightarrow \bar{V}(\phi) = F$.

Επομένως, όταν το ϕ είναι ταυτολογία, ο προσημασμένος τύπος $-\phi$ δεν είναι δυνατόν ποτέ να ικανοποιείται από καμία αποτίμηση. Επομένως, δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα για το συγκεκριμένο σύνολο προτάσεων των $(-\phi)$ θα υπάρχει ένα υλικό συντακτικό tableau. Δηλαδή, όλα τα υλικά του θα είναι υλικά. Επομένως, προσπαθούμε να δείξουμε για το $-\phi$ ένα υλικό συντακτικό tableau.

ΗΤΗΜΑ 4ο (ΕΟΥΙΧΕΙΑ).

ο λήμμα μπορεί κανείς ότι αν μια από κάποιο V ικανοποιεί την υπόθεση
νοι ταυτόχρονα τότε θα ικανοποιεί ταυτόχρονα ένα από R κλαδιά του.
Έστω ότι το σύνολο Λ των προσηκαθήκουσων προτασιακών τύπων
δεν είναι ικανοποιήσιμο και ότι υπάρχει ένα κλαδί του δεν κλείνει.
Έστω Λ' το σύνολο των προσηκαθήκουσων προτασιακών τύπων του κλαδιού
που δεν είναι κλειστό. Το Λ' είναι Hintikka και επομένως ικανοποιήσιμο. Άρα, το $\Lambda \subseteq \Lambda'$
θα είναι επίσης ικανοποιήσιμο. ΑΤΟΠΟ.

* καλύτερη επιλογή φορμάτου 1β).

Έστω ότι ο προτασιακός τύπος $\phi \equiv \neg(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_n) \vee \phi$ δεν είναι ταυτολογία.
Τότε $\bar{V}(\neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \vee \phi) = f \Rightarrow \bar{V}(\neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) = f$ και $\bar{V}(\phi) = f$
Όμως, $\bar{V}(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) = T$ και $\bar{V}(\phi) = f \Rightarrow \bar{V}(\phi_1) = \bar{V}(\phi_2) = \dots = \bar{V}(\phi_n) = T$ και $\bar{V}(\phi) = f$.

ΑΤΟΠΟ.