

# ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

14/6/2018

Στα επόμενα, για  $k \in \mathbb{N}$ , συμβολίζουμε με  $d_k$  την Ευχλείδεια μετρική στον  $\mathbb{R}^k$ .

## ΘΕΜΑ 1.

(α). Έστω  $A$  και  $B$  μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $\sup A \leq \sup B$ . Δείξτε ότι  $\sup(A \cup B) = \sup B$ .

(β). Ο  $(X, d)$  είναι ένας μετρικός χώρος. Ορίζουμε  $\rho(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ ,  $\forall x \in X, \forall y \in X$ .

(i). Δείξτε ότι η  $\rho$  είναι μία μετρική στον  $X$ .

(ii). Δείξτε ότι οι μετρικές  $\rho$  και  $d$  είναι ισοδύναμες. Επίσης δείξτε ότι ο μετρικός χώρος  $(X, d)$  είναι πλήρης αν, και μόνο αν, ο μετρικός χώρος  $(X, \rho)$  είναι πλήρης.

## ΘΕΜΑ 2.

(α). Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$ . Βρείτε την κλειστότητα και το εσωτερικό του  $A$  στο μετρικό χώρο  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

(β). Ο  $(X, d)$  είναι ένας μετρικός χώρος και  $A \subset X$ . Δείξτε ότι  $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ .

(γ). Οι  $(X, d)$  και  $(Y, \rho)$  είναι μετρικοί χώροι και η απεικόνιση  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  είναι συνεχής. Δείξτε ότι  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  για κάθε  $A \subset X$ . Τι συμπεραίνετε για τον  $(Y, \rho)$  αν η  $f$  είναι επιπλέον επί και ο  $(X, d)$  είναι διαχωρίσιμος;

(δ). Θέτουμε  $Z = (0, 1)$  και  $d = d_1|Z$ . Αν η απεικόνιση  $\phi: (Z, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, δείξτε ότι υπάρχει το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi(z)$ .

## ΘΕΜΑ 3.

(α). Ο  $(E, \tau)$  είναι ένας μετρικός χώρος και  $A \subset E$ . Υποθέτουμε ότι ο μετρικός χώρος  $(A, \tau|A)$  είναι πλήρης. Δείξτε ότι το  $A$  είναι ένα κλειστό υποσύνολο του  $(E, \tau)$ .

(β). Διατυπώστε το θεώρημα Baire για πλήρεις μετρικούς χώρους και, κάνοντας χρήση αυτού, αποδείξτε ότι το  $\mathbb{R}$  είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ). Ο  $(X, d)$  είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και το  $G$  ένα μη κενό, ανοιχτό υποσύνολο του  $(X, d)$ . Επίσης, δίνεται μία ακολουθία  $(F_n)_{n=1}^\infty$  από κλειστά υποσύνολα του  $(X, d)$  τέτοια ώστε  $G \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $m \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε  $(F_m)^\circ \neq \emptyset$ . (Υπόδ. Αν  $(F_n)^\circ = \emptyset$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , χρησιμοποιείστε το υποερώτημα (β) του θέματος 2 για να συμπεράνετε ότι το  $X \setminus F_n$  είναι πυκνό.)

## ΘΕΜΑ 4.

(α). Αν  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$ , δείξτε ότι το  $K$  είναι ένα συμπαγής υποσύνολο του μετρικού χώρου  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

(β). Ο  $(X, d)$  είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και η  $(H_n)_{n=1}^\infty$  μία ακολουθία από μη κενά, κλειστά υποσύνολα του  $(X, d)$  τέτοια ώστε  $H_{n+1} \subset H_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Δείξτε ότι  $\bigcap_{n=1}^\infty H_n \neq \emptyset$ .

(γ). Ο  $(Y, \rho)$  είναι ένας μετρικός χώρος και τα  $K_1, K_2$  είναι μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του  $(Y, \rho)$ . Να δείξετε ότι υπάρχουν  $y_1 \in K_1$  και  $y_2 \in K_2$  τέτοια ώστε  $\rho(y_1, y_2) \leq \rho(x, y)$  για κάθε  $x \in K_1$  και κάθε  $y \in K_2$ .