



ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΩΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ. Κομίνης (Τομέας Μηχανικής, ΣΕΜΦΕ)

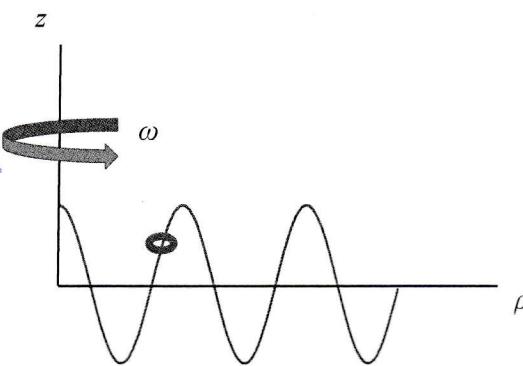
Διάρκεια εξέτασης: 2:15

23/1/2018

### Θέμα 1<sup>o</sup> (40%)

Ένα συρμάτινο καλώδιο έχει επίπεδο σχήμα που δίνεται από την εξίσωση  $z = \cos \rho$ , και είναι τοποθετημένο κατακόρυφα, όπως φαίνεται στο σχήμα, μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο. Το καλώδιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από τον άξονα  $z$ , και ένας δακτύλιος μάζας  $m$  μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβή περασμένος στο καλώδιο.

- (α) Να βρείτε τη Lagrangian του συστήματος.  
(β) Να βρείτε την σχέση που δίνει τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. Τι ρόλο παίζει η τιμή της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  ως προς την ύπαρξη σημείων ισορροπίας; *† ήταν διαρροήν*  
(γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Jacobi και να εξετάσετε αν διατηρείται και αν είναι ίσο με την μηχανική ενέργεια του συστήματος.  
(δ) Να βρείτε τη δύναμη του δεσμού, που περιορίζει την κίνηση πάνω στο καλώδιο, σαν συνάρτηση της θέσης του δακτυλίου, όταν αυτός αφήνεται από το σημείο  $\rho=0$ .



### Θέμα 2 (35%)

Η Lagrangian ενός φυσικού συστήματος είναι:

$$L = e^{2\gamma t} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

όπου  $\gamma, m, k$  είναι θετικές σταθερές.

- (α) Υπολογίστε την κανονική ορμή του συστήματος. Ποια η σχέση της κανονικής ορμής με την κλασσική μηχανική ορμή  $m\dot{x}$ ? Ποια από τις δύο διατηρείται στην περίπτωση όπου  $k = 0$ ? *Παρατίθεται το από το πάνω σύντομα*  
(β) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος και λύστε την σε γενική μορφή. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει?  
(γ) Κατασκευάστε την Hamiltonian του συστήματος.  
(δ) Γράψτε και λύστε τις εξισώσεις Hamilton σε γενική μορφή.  
(ε) Ορίστε τις παρακάτω ποσότητες:

$$u = \frac{x + m\dot{x}}{\sqrt{2}} e^{\gamma t}, \quad u^* = \frac{x - m\dot{x}}{\sqrt{2}} e^{\gamma t}$$

Υπολογίστε την αγκύλη Poisson  $[u, u^*]$ . Είναι οι ποσότητες αυτές συζυγείς κανονικές μεταβλητές;

- (στ) Να γραφτεί η Hamiltonian του συστήματος στις μεταβλητές  $(u, u^*)$  και να ελεγχθεί αν είναι σταθερά της κίνησης.

### Θέμα 3<sup>o</sup> (25%)

- (α) Να βρείτε την έκφραση, με αγκύλες Poisson, της ολικής χρονικής μεταβολής μιας συνάρτησης  $u(q, p)$  στον φασικό χώρο ενός συστήματος 1<sup>o</sup>s βαθμού ελευθερίας με Hamiltonian  $H$ .  
(β) Να δείξετε ότι η δυναμική μεταβλητή  $u = pq / 2 - Ht$  είναι ολοκλήρωμα της κίνησης του συστήματος με συνάρτηση Hamilton  $H = p^2 / 2 - 1/(2q^2)$ .

Καλή επιτυχία !