

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ II ΣΕΜΦΕ, 5/10/2015
 $T(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y})$

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση. Έστω e_1, \dots, e_d , η συνήθης βάση του \mathbb{R}^d και $a = (T(e_1), \dots, T(e_d)) \in \mathbb{R}^d$. (i) (0,5 μον) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, έχουμε $T(x) = a \cdot x$. (ii) (0,75 μον) Αν $M > 0$ και $B_M = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq M\}$, βρείτε $x_0 \in B_M$ ώστε $T(x_0) = \max\{|T(x)| : x \in B_M\}$.

(β) Εξετάστε με χρήση ακολουθιών και υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια
(i) (0,5 μον) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$, (ii) (0,75 μον) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (i) (0,5 μον) Πότε λέμε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) ; (ii) (0,75 μον) Να ορίσετε τις μερικές παραγώγους ως προς x και y της f στο (x_0, y_0) και να δείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) τότε αυτές υπάρχουν.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+y}$ (i) (0,5 μον) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο κριτήριο παραγωγισμότητας δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (ii) (0,75 μον) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\max\{|x|, |y|\}}.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}^2$. (i) (0,5 μον) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το x_0 να μην είναι τοπικό ακρότατο για την f . (ii) (0,75 μον) Έστω ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης. Αν $f_{xx}(x_0) \cdot f_{yy}(x_0) < 0$, δείξτε ότι το x_0 δεν είναι τοπικό ακρότατο.

(β) (1,25 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

ΘΕΜΑ 4. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^3$ με $\|e\| = 1$ και $x_0 \in \mathbb{R}^3$. (i) (0,5 μον) Δώστε τον ορισμό της παραγώγου $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ της f στο x_0 κατά την κατεύθυνση e . (ii) (0,3 μον) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με τι ισούται $\eta \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$; (iii) (0,45 μον) Αν $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ και $x_0 = (1, 2, 3)$ δώστε τις κατευθύνσεις ε για τις οποίες $\eta \frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ γίνεται μέγιστη και ελάχιστη.

(β) (1,25 μον) (i) (0,75 μον) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^{\cos(xy)} + x^2 + y - e = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση $y = f(x)$ σε μια περιοχή του σημείου $(0, 0)$ και υπολογίστε την $f'(0)$. (ii) (0,5 μον) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $e^{\cos(xy)} + x^2 + y - e = 0$ στο $(0, 0)$.