

Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων II

Πέμπτη 21/6/2018, Εαρινή εξεταστική περίοδος 2017-18, ΣΕΜΦΕ

Διδάσκων: Ζουπάνος Γιώργος

Συνεργάτης: Πατέλλης Γρηγόρης

Εξάμηνο 8ο - Διάρκεια 3 ώρες - Επιλογή 4 θεμάτων

ΘΕΜΑ 1

A. Δίνεται η εξίσωση Klein - Gordon για ένα βαθμωτό μιγαδικό πεδίο ϕ , μάζας m :

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi. \quad (1)$$

(i) Να βρείτε την πυκνότητα πιθανότητας και το ρεύμα πιθανότητας κι έπειτα να τα γράψετε συλλογικά σαν συνιστώσεις ενός τετρα-διανύσματος, του j^μ .

(ii) Θεωρήστε τώρα τη λαγκρανζιανή πυκνότητα μιγαδικού βαθμωτού πεδίου, ϕ :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Langrange, να δείξετε ότι η \mathcal{L} οδηγεί στη συναλλοίωτη μορφή της (1), δηλαδή στην $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$.

B. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα ενός άμαζου διανυσματικού πεδίου, A_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu.$$

(i) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler - Langrange, να καταλήξετε στις εξισώσεις κίνησης, δηλαδή στη συναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων Maxwell στο κενό με πηγές.

(ii) Εσκινώντας από την εξίσωση κίνησης, $\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$, να καταλήξετε στην εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\nu j^\nu = 0.$$

ΘΕΜΑ 2

A. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει δύο ελεύθερα φερμιόνια, u, d , ίδιας μάζας m :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}_u (i \not{\partial} - m) \psi_u + \bar{\psi}_d (i \not{\partial} - m) \psi_d \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}_u & \bar{\psi}_d \end{pmatrix} (i \not{\partial} - m) \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Θεωρήστε, επίσης, έναν $SU(2)$ μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i \vec{\alpha} \vec{\tau}/2} \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}, \quad (3)$$

όπου $\vec{\alpha}$ σταθερό.

(i) Να δείξετε ότι η λαγκρανζιανή (2) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό (3).

(ii) Δεδομένου λοιπόν ότι ο παραπάνω, (3), είναι μετασχηματισμός συμμετρίας, να βρεθεί το συσχετιζόμενο ρεύμα Noether.

(iii) Δεδομένου ότι το διατηρούμενο ρεύμα Noether δίνεται από τη σχέση:

$$j^\mu = \bar{\psi}_u \gamma^\mu \frac{\vec{\alpha} \vec{\tau}}{2} \psi_u + \bar{\psi}_d \gamma^\mu \frac{\vec{\alpha} \vec{\tau}}{2} \psi_d, \quad (4)$$

να βρεθεί το διατηρούμενο φορτίο, Q .

B. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει ένα φερμιονικό πεδίο μάζας m :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi. \quad (5)$$

↙ (i) Να δείξετε ότι η (5) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον (global) μετασχηματισμό:

$$\psi \rightarrow e^{ia} \psi, \quad (6)$$

ενώ πιαύει να είναι όταν η σταθερά a αντικατασταθεί από μία τυχαία συνάρτηση $a(x)$, ή αλλιώς όταν ο μετασχηματισμός γίνεται τοπικός:

$$\psi \rightarrow e^{ia(x)} \psi. \quad (7)$$

(ii) Να δείξετε ότι η \mathcal{L} παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον τοπικό μετασχηματισμό (7), αφού 'αναβαθμίσετε' την παράγωγο σε συναλλοίωτη:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (8)$$

όπου έγινε εισαγωγή ενός διανυσματικού πεδίου, το οποίο μετασχηματίζεται με τη σειρά του:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu a(x) \quad (9)$$

και e είναι μία σταθερά.

(iii) Γνωρίζουμε ότι λόγω της εισαγωγής του διανυσματικού πεδίου, A_μ , στη λαγκρανζιανή πυκνότητα (μέσω της παραγώγου), είναι απαραίτητο να εισαχθεί σε αυτήν ο κινητικός όρος $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, όπου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (10)$$

προκειμένου να εκφράζεται ρητά το γεγονός ότι το A_μ είναι ένα διαδιδόμενο πεδίο. Δεδομένου ότι το A_μ μετασχηματίζεται όπως φαίνεται στη σχέση (9), να δείξετε ότι ο όρος $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ είναι αποδεκτός (gauge αναλλοίωτος) στη λαγκρανζιανή, αλλά ένας όρος μάζας για το A_μ δεν είναι.

ΘΕΜΑ 3

Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) + \mu^2 (\phi^* \phi) - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (11)$$

όπου

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad D_\mu \phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi, \quad (12)$$

η οποία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς $U(1)$.

(i) Για $g = 0$ (ανάγεται στην περίπτωση ολικής συμμετρίας) και $\mu^2 > 0$, να δειξετε ότι η συμμετρία παραβιάζεται αυθόρμητα με αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός άμαζου μποζονίου Goldstone.

(ii) Για $g \neq 0$, να βρείτε το σωματιδιακό φάσμα της θεωρίας και να προσδιορίσετε τις μάζες των σωματιδίων που το απαρτίζουν.

(iii) Εξηγήστε πώς διαπιστώνουμε ότι η λαγκρανζιανή πυκνότητα στην οποία καταλήγουμε κρίνεται ως ακατάλληλη για την εξαγωγή του σωματιδιακού φάσματος. Με ποιον τρόπο προκύπτει η κατάλληλη στην οποία δεν περιέχεται το Goldstone μποζόνιο (would-be Goldstone boson); Τί του συνέβη;

ΘΕΜΑ 4

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων:

(i) Να βρεθεί ο πίνακας ανάμιξης μαζών των διανυσματικών μποζονίων W_μ^3 και B_μ , μετά το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.

(ii) Να βρεθούν οι εκφράσεις που δίνουν τα φυσικά διανυσματικά μποζόνια Z_μ , A_μ και να υπολογιστούν οι μάζες τους.

(iii) Να βρεθούν τα ουδέτερα ρεύματα j_μ^0, j_μ^{em} που συνδέονται με τα Z_μ, A_μ αντίστοιχα, ως συνάρτηση των ρεύμάτων j_μ^3, j_μ^Y που εμφανίζονται στην λαγκρανζιανή πυκνότητα πριν παραβιαστεί αυθόρμητα η συμμετρία.

ΘΕΜΑ 5

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων:

(i) Να βρεθεί η μάζα του φυσικού σωματιδίου Higgs συναρτήσει των παραμέτρων του δυναμικού.

(ii) Να βρεθούν οι μάζες των λεπτονίων, και των κουάρκ (u-τύπου, d-τύπου) καθώς και οι σταθερές σύνδεσης του σωματιδίου Higgs με τα φερμιόνια. Για ευκολία, συμπεριλάβετε μόνο τα σωματίδια της πρώτης γενιάς στη λαγκρανζιανή πυκνότητα.

(iii) Τί πληροφορίες μας δίνει ο πίνακας των Cabibbo - Kombayashi - Maskawa; Τί είναι η γωνία Cabibbo;

ΘΕΜΑ 6

Ένας τρόπος να δώσουμε μάζα στα νετρίνα είναι - πέρα από το σωματιδιακό φάσμα του Καθιερωμένου Προτύπου - να θεωρήσουμε επιπροσθέτως την ύπαρξη δεξιόστροφων νετρίνων, ένα για κάθε γενιά. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μπορέσουμε να θεωρήσουμε έναν όρο μάζας Dirac: $m_D(\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R)$, αλλά και όρους μάζας Majorana: $m_L(\bar{\nu}_L^c \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_L^c) + m_R(\bar{\nu}_R^c \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_R^c)$. Συνολικά, οι όροι μάζας γράφονται:

$$(\bar{\nu}_L \quad \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (13)$$

- (i) Στο πλαίσιο του μηχανισμού της τραμπάλας (seesaw mechanism), να διαγωνιούσετε τον παραπάνω πίνακα και να υπολογίσετε τη γωνία ανάμιξης.
- (ii) Μία δέσμη νετρίνων παράγεται (με κοινή ορμή $p >> m_{\nu_e}, m_{\nu_\mu}$) στην ιδιοκατάσταση ν_{0e} του λεπτονικού ρεύματος. Να βρείτε την πιθανότητα μετά από χρόνο t να μετατραπεί σε $\nu_{0\mu}$ κι έπειτα την πιθανότητα να παραμείνει ν_{0e} . Ποιά είναι η περίοδος της ταλάντωσης?
(Να θεωρήσετε την ύπαρξη μόνο δύο γενιών στο δευτερό ερώτημα.)

Καλή Επιτυχία !!!