



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών

Εξέταση στις ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΟΜΑΔΑ Α
ΣΕΜΦΕ, Φεβρουάριος 2015

ZHTHMA PΡΩΤΟ:

- α) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί το Θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία τριών συναρτήσεων $g_1(u), g_2(u), g_3(u)$, $u \in I$, I ανοιχτό διάστημα, με την ορίζουσα Wronski. (μον. 1)
β) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης $y''' - 3y'' + y' - 3y = t^2 + \sin t$ (μον. 0.75)

- ZHTHMA ΔΕΥΤΕΡΟ:** α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση Legendre $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$. Αν $P_k(t), P_n(t)$ είναι οι πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης για $\alpha = k, n \in \mathbb{N}$ αντιστοίχως να διατυπωθεί και αποδειχθεί η σχέση ορθογωνιότητας που συνδέει τα πολυώνυμα Legendre. (μον. 0.5)
β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $x^2y'' - 2y = 0, y(3) = 1, y'(3) = b$. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς b ώστε η λύση του προβλήματος να είναι φραγμένη του $x \rightarrow +\infty$. (μον. 0.5)
γ) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημεία και για τα κανονικά να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και τό διάστημα σύγκλισης της λύσης σε δυναμοσειρά της εξίσωσης $(x+2)^3(x-1)y'' + 3(x^2+1)y' + 3y = 0$ (μον. 0.75)

- δ) Να λυθεί με χρήση ολοκληρωτικού μετασχηματισμού η εξίσωση

$$y'' + y = \begin{cases} 4 \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 2, & \pi \leq t < \infty \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(μον. 1.5)

ZHTHMA ΤΡΙΤΟ:

- α) Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$. (μον. 1)
β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών και να προσδιορισθεί το διάστημα ορισμού της λύσης
 $y' - \frac{y}{x} = y^2, \quad y(1) = 2$ (μον. 1)
γ) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = \ln(y^2 - t^2)$, $y(t_o) = y_o$. Να προσδιορισθούν οι περιοχές του επιπέδου $t y$ στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (μον. 0.5)

ZHTHMA ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με την μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Να προσδιορισθεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου του συστήματος και να σχεδιασθεί κατά προσέγγιση το επίπεδο φάσεων. (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad L(e^{at} f(t)) = F(s-a), \quad L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

αν $F(s) = L(f(t))$ και $u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases}$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία