



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κανονική εξέταση στο μάθημα ΦΥΣΙΚΗ Ι 16 Φεβρουαρίου 2015

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες. Απαντήστε σε όλα τα θέματα.

Διδάσκοντες : Κ.Φαράκος, Ρ.Βλαστού-Ζάννη

Θέμα 1. (25 μονάδες)

Σωματίδιο μάζας  $m$  βρίσκεται σε πεδίο δυνάμεων και το διάνυσμα θέσης του είναι:

$(a\cos(\omega t), b\sin(\omega t), 0)$ , όπου τα  $a$ ,  $b$  και  $\omega$  είναι θετικές σταθερές.

(α) Να δείξετε ότι το σωματίδιο εκτελεί ελλειπτική τροχιά.

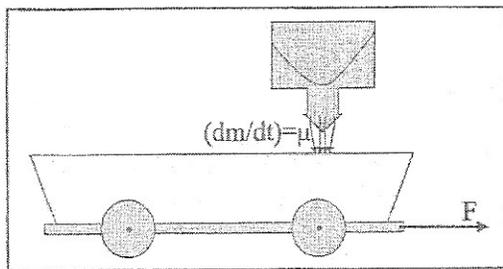
(β) Να δείξετε ότι οι συνιστώσες της δύναμης που απαιτείται για να διαγράφεται μια τέτοια τροχιά δίνονται από τις σχέσεις:

$$F_x = -m\omega^2 x, \quad F_y = -m\omega^2 y, \quad F_z = 0$$

(γ) Να εξετάσετε αν αυτό το πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο. *διαμριωέ*

(δ) Αν το πεδίο είναι αστρόβιλο, υπολογίστε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια  $U(x, y, z)$ , χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και υποθέτοντας ότι  $U(0,0,0) = 0$ .

Θέμα 2. (25 μονάδες)



Βαγονέτο μάζας  $m_0$  αρχίζει, σε χρόνο  $t=0$ , να κινείται, σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, κατά μήκος ευθείας υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης  $F$ . Ταυτόχρονα, αρχίζει να προστίθεται στο βαγονέτο σιτάρι, με σταθερή παροχή  $dm/dt = \mu$ , από ένα θεριστικό μηχάνημα, το οποίο στέκεται ακίνητο. Βρείτε την χρονική εξέλιξη της ταχύτητας  $v=v(t)$  και της επιτάχυνσης  $a=a(t)$  του βαγονέτου, για όσο

διάστημα η χοάνη φόρτωσης βρίσκεται πάνω από το βαγονέτο.

Θέμα 3. (30 μονάδες)

Ενας μετεωρολογικός δορυφόρος μάζας  $m$  κινείται με ταχύτητα  $v_0$  σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $r_0$  γύρω από τη γη. Τα μετρητικά συστήματα του δορυφόρου έχουν καταστραφεί και η NASA θέλει να απαλλαγεί από τον δορυφόρο στέλνοντάς τον στο διάστημα μακριά από την γήινη ατμόσφαιρα και εκτός του πεδίου βαρύτητας της γης. Για τον σκοπό αυτό εκτοξεύεται ακτινικά ένα βλήμα μάζας  $m$  με ταχύτητα  $3v_0$ , συγκρούεται με τον δορυφόρο και ενσωματώνεται με αυτόν δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας  $M=2m$ .

α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή  $L$  του συσσωματώματος ως προς το κέντρο της γης διατηρείται και υπολογίστε την τιμή της.

β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να αποδείξετε ότι η ολική ενέργεια του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση :

$$E = \frac{1}{2} M \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$$

Περιγράψτε ποιοτικά τις δυνατές κινήσεις του συσσωματώματος.

γ) είναι αρκετή η ταχύτητα  $3v_0$  του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της γης; Σε αυτή την περίπτωση τί είδους τροχιά θα ακολουθήσει;

δ) για να ακολουθήσει παραβολική τροχιά πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική ταχύτητα του βλήματος;

Θεωρήστε ότι η γη είναι σφαιρική και έχει μάζα  $M_T$ .

#### Θέμα 4. (30 μονάδες)

Ενας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης  $R$  και ύψος  $H$ . Αποτελείται από υλικό του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται με την απόσταση  $r$  από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση  $\rho = \rho_0(1-r/R)$ , όπου  $\rho_0$  είναι θετική σταθερά.

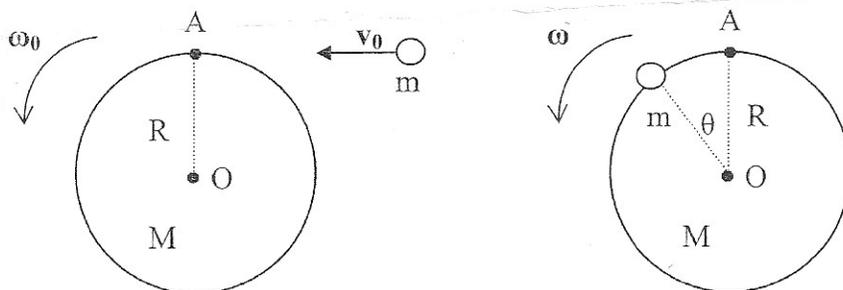
α) Να υπολογισθεί η μάζα  $M$  του κυλίνδρου

β) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του, συναρτήσει της μάζας  $M$  και της ακτίνας  $R$ .

γ) Θεωρήστε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$ , μια μικρή μάζα  $m$  με ταχύτητα  $v_0$  κτυπάει και κολλάει στην άκρη του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μόλις κολλήσει η μάζα στον κύλινδρο.

δ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση  $dL/dt = N$  για να δείξετε ότι, όταν το σύστημα έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\theta$ , η γωνιακή του ταχύτητα  $\omega^2 = (d\theta/dt)^2$  είναι ανάλογη του  $(1 - \cos\theta)$ .

ε) Πόση δύναμη ασκείται στη μάζα  $m$  από την «κόλληση», καθώς το σύστημα περιστρέφεται, για γωνία  $\theta$  στο διάστημα  $(0, \pi/2)$ .



Καλή επιτυχία

ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΔΕΝ ΕΠΙΤΡΕΠΕΤΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΚΙΝΗΤΟΥ ΤΗΛΕΦΩΝΟΥ Ή ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΣΥΣΚΕΥΗΣ ΜΕ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.