

ΣΧΕΔΙΑΣΗ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ, ΣΕΜΦΕ 2018, ΕΠΙΛΟΓΗ 4 ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. (1) Δείξτε ότι, αν ο πίνακας $A(n \times n)$ είναι Hurwitz, τότε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και είσοδο u με $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, η αντίστοιχη κατάσταση $x(t) = x(t, x_0, u)$ του $\dot{x} = Ax + ub$ τείνει στο μηδέν καθώς $t \rightarrow +\infty$. (2) Δείξτε ότι το $0 \in \mathbb{R}^3$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_3^2, \quad \dot{x}_3 = -x_3.$$

Θέμα 2. Έστω $\Sigma_1: \dot{x} = Ax + ub$, $\Sigma_2: \dot{z} = \bar{A}z + ub$, $x, z \in \mathbb{R}^n$, όπου \bar{A} όμοιος με A και Σ_1, Σ_2 ελέγξιμα. Δείξτε ότι $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$.

Θέμα 3. Προσδιορίστε τα α, β, γ έτσι ώστε :

- (1) Το πολυώνυμο $p := s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \gamma$ είναι Hurwitz.
- (2) Η ελάχιστη πραγματοποίηση του πιλίκου $(s-1)/p(s)$ να είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη .
Σχεδιάστε μια τέτοια πραγματοποίηση.

Θέμα 4. Δώστε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε το σύστημα

$$\Sigma: \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Να είναι ελέγξιμο (2) Να είναι σταθεροποιήσιμο. Στην περίπτωση (1) δώστε την κανονική ελέγξιμη μορφή του και περιγράψτε τη διαδικασία σταθεροποίησής του.

Θέμα 5. Δείξτε ότι αν (c, A, b, \mathbb{R}^n) μία ελάχιστη πραγματοποίηση μιας δοθείσης ρητής παράστασης p/q με $\deg q = n > \deg p$, τότε το (A, b) είναι ελέγξιμο, το (c, A) παρατηρήσιμο και $q(s) := \det(sI - A)$.

Θέμα 6. Δείξτε ότι αν Σ_1, Σ_2 είναι δύο κανονικές μη ελέγξιμες μορφές του ίδιου (μη ελέγξιμου) γραμμικού συστήματος, τότε $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ και κατέχουν τις ίδιες μη ελέγξιμες ιδιοτιμές.

Θέμα 7. (1) Δώστε τον ορισμό του οριακού συνόλου L_{x_0} για το συστημα $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ και δείξτε ότι είναι χρονικά αναλλοίωτο. (2) Αν $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ επαρκώς παραγωγίσιμη με $\nabla V f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, δείξτε ότι $\nabla V f(x) = 0, \forall x \in L_{x_0}$ (3) Διατυπώστε το θεώρημα LaSalle και εφαρμόστε το στην περίπτωση

$$\Sigma: \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ -(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

Θέμα 8. (1) Να αποδείξετε ότι αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι Hurwitz τότε ισχύει η ISS ιδιότητα για το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = Ax + Cd$, με $x \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}^m$, όπου $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$. (2) Να εκτιμήσετε το κέρδος της διαταραχής $d \in \mathbb{R}$ για το σύστημα $\dot{x}_1 = x_2 + d, \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$.

Θέμα 9. (1) Να δείξετε ότι αν $\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{k \times n}$, τότε το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$,

$y = Cx$ με $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k$, όπου $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, είναι παρατηρήσιμο. (2) Να κατασκευάσετε έναν παρατηρητή για το σύστημα $\dot{x}_1 = x_2 + u, \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + 2u, y = x_1$.

Καλή επιτυχία.