ΣΧΟΛΗ: Ε.Μ.Φ.Ε. **Ιούνιος 2016**

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1 (2.5 μονάδες)

Τα ερωτήματα Α και Β δε σχετίζονται μεταξύ τους.

Α. Έστω ότι σε μια συγκεκριμένη διαδρομή η πιθανότητα όπως οποιοδήποτε φανάρι της τροχαίας είναι κάποιου χρώματος όταν το προηγούμενο έχει το ίδιο χρώμα είναι p. Αν το πρώτο φανάρι είναι κόκκινο με πιθανότητα α και πράσινο με πιθανότητα 1 – α, να υπολογιστεί η πιθανότητα το τρίτο φανάρι να είναι πράσινο.

Β. Μια ασφαλιστική εταιρεία αυτοκινήτων έχει 10.000 πελάτες. Η μέση ετήσια αποζημίωση ανά πελάτη είναι €240 με τυπική απόκλιση €800. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η πιθανότητα οι συνολικές ετήσιες αποζημιώσεις να ξεπεράσουν τα €2.500.000.

ΘΕΜΑ 2 (2.5 μονάδες)

Έστω η τ.μ. Χ με σ.π.π.

$$f(x) = \alpha x + \beta x^2, \quad 0 < x < 1, \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ είναι άγνωστες σταθερές}.$$

(α) Αν E[X] = 0.6 να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής F της τ.μ. Χ και μετά να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης κατανομής F στο σημείο 0.5.

(β) Να βρεθεί η πιθανότητα P(X<1/2|X<3/4)

ΘΕΜΑ 3 (2.5 μονάδες)

Υπάρχει μια καταγγελία ότι ένα ποτάμι μολύνεται από λύματα του βιολογικού καθαρισμού μιας παραποτάμιας πόλης. Για να ελέγξει αυτόν τον ισχυρισμό ένας περιβαλλοντολόγος έκανε 5 τυχαίες μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου σε κάθε ένα από δύο σημεία του ποταμού. Το ένα σημείο (Α) βρίσκεται πάνω από την πόλη και το άλλο (Β) κάτω από την πόλη (πλησιέστερα προς τις εκβολές του ποταμού). Τα αποτελέσματα, σε μέρη στο εκατομμύριο δίνονται στον επόμενο πίνακα

Σημείο Α	5.2	4.8	5.0	4.9	5.1
Σημείο Β	4.7	5.0	4.9	4.8	4.9

(α) Υπάρχουν σημαντικές ενδείξεις στο 1% ε.σ. ότι η μέση συγκέντρωση στο σημείο Β είναι μικρότερη από τη μέση συγκέντρωση στο σημείο Α? Υποθέστε ίσες διασπορές για τις συγκεντρώσεις στα δύο σημεία του ποταμού. Τι άλλες υποθέσεις χρειάζεται να γίνουν?

(β) Να βρεθεί η p-value του ελέγχου.

(γ) Να βρεθεί Δ.Ε. με σ.ε. 95% για την τυπική απόκλιση της συγκέντρωσης στο σημείο Α.

ΘΕΜΑ 4 (2.5 μονάδες)

Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ τυχαίο δείγμα από την Γάμμα κατανομή

$$f(x,\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ.

(β) Να βρεθεί η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ με τη μέθοδο των ροπών. Τι παρατηρείτε?

Διωνυμικη $f(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, x=0,1,\dots,n$	$E(X)=np,\ Var(X)=np(1-p)$
Γεωμετρικη $f(x)=p(1-p)^{x-1},\ x=1,2,\dots$	$E(X)=\frac{1}{p},\ Var(X)=\frac{1-p}{(p)^2}$
Poisson $f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x=0,1,\dots$	$E(X)=\lambda,\ Var(X)=\lambda$
Κανονικη $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$	$E(X)=\mu,\ Var(X)=\sigma^2$
Γαμμα(α,β) $f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x},\ x>0$ $\Gamma(\alpha)=(a-1)!$ για $\alpha\in Z$	$E(X)=\frac{\alpha}{\beta},\ Var(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Εκθετικη $f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0$	$E(X)=\frac{1}{\lambda},\ Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$\theta^2 x e^{-\theta x}$

$\theta^2 =$

$\theta = \beta$

$a = 2$

$+e^{-\theta x}$

Δίνεται ότι:
Φ(1.96)=0.975, Φ(2.33)=0.990, Φ(1.645)=0.95, Φ(1.29)=0.90
Φ(2.5)=0.993, Φ(1.5)=0.933, Φ(3.99)=0.999, Φ(2.055)=0.980,
Φ(2.44)=0.992, Φ(0.5)=0.691, ~~Φ(0.125)~~=0.547, Φ(3.46)=0.999

Φ(1,25)

$P(t_{11}>1.796)=0.05, P(t_{14}>2.624)=0.01, P(t_7>2.998)=0.01, P(t_{10}>2.764)=0.01$

$P(t_6>2.447)=0.025, P(t_8>2.896)=0.01, P(t_9>3.250)=0.005, P(t_8>1.397)=0.10$

$P(t_{14}>1.761)=0.05, P(t_{12}>2.179)=0.025, P(t_8>0.706)=0.25, P(t_{12}>2.681)=0.01$

$P(t_9>2.821)=0.01, P(t_7>2.365)=0.025, P(t_{12}>1.782)=0.05, P(t_{10}>3.169)=0.005$

$P(\chi_4^2>11.143)=0.025, P(\chi_8^2>20.09)=0.01, P(\chi_5^2>0.831)=0.975, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.01$

$P(\chi_6^2>12.59)=0.01, P(\chi_9^2>16.91)=0.05, P(\chi_8^2>15.50)=0.05, P(\chi_{12}^2>21.03)=0.05$

$P(\chi_4^2>0.484)=0.975, P(\chi_8^2>1.64)=0.99, P(\chi_5^2>12.833)=0.025, P(\chi_{12}^2>26.22)=0.99$

$t_{\alpha/2,n_1+n_2-1}$

*** Διάρκεια Εξέτασης: 2 ½ ωρες***

$\int x^2\theta^2 e^{-\theta x}dx = \int \theta\left(\frac{-e^{-\theta x}}{\theta}\right)' x^2 = -\theta e^{-\theta x}x^2 - \int$

e^{2x}

e^{2x}