

# A

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο - Ιούνιος 2015  
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο .....

## Θ E M A T A

- Θ1.** i) Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός ορθόμοναδικίου πίνακα είχουν μέτρο 1. (0.4μ)
- ii) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοιος ώστε  $Te_1 = e_1 + 2e_2 - 4e_3$ ,  $Te_2 = 2e_1 - 2e_2 - 2e_3$ ,  $Te_3 = -4e_1 - 2e_2 + e_3$ , όπου  $\{e_1, e_2, e_3\}$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$ . Να δείξετε ότι ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής. (0.4μ)
- iii) Δίνεται ο υπόγωφος  $M$  του  $\mathbb{R}^4$ , που παράγεται από τα διανύσματα  $u_1 = (1, 1, 0, -1)$ ,  $u_2 = (1, -2, 1, 0)$ . Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα  $M^\perp$  του  $M$  καθώς και τις ορθές προβολές του διανύσματος  $v = (4, 3, 0, 1)$  στους υποχώρους  $M$  και  $M^\perp$ . (1.2μ)
- iv) Έστω δύο  $n \times n$  πίνακες  $A$  και  $B$  τέτοιοι ώστε  $AB = BA$ . Αν ο  $B$  έχει  $n$  απλές ιδιοτιμές, να δείξετε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P$  τέτοιος ώστε οι πίνακες  $P^{-1}AP$  και  $P^{-1}BP$  να είναι διαγώνιοι. (1.5μ)

- Θ2.** i) Τι συμπεραίνετε για έναν πίνακα  $A$  αν γνωρίζετε ότι έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)^5(\lambda - 4)^4$  και ελάχιστο πολυώνυμό  $m_A(\lambda) = (\lambda + 3)^3(\lambda - 4)^2$ ; (0.7μ)

- ii) Βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -4 \\ 2\alpha + 2 & \alpha + 4 & -2\alpha - 2 \\ 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

- είναι διαγωνοποιήσιμος μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας και για ποιες όχι. (1.4μ)

- iii) Για τις τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες ο πίνακας  $A$  του ii) δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του  $A$  και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. (1.4μ)

- Θ 3. α)** Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Να αντιλογήσετε γιατί ο  $A$  διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα και να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα  $Q$  και έναν διαγώνιο πίνακα  $\Delta$  ώστε να ισχύει:  $A = Q\Delta Q^T$ . (1.8μ)

- β) Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 1 = 0$ . Να δείξετε ότι η επιφάνεια που περιγράφει η εξίσωση έχει μοναδικό κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και κατόπιν με κατάλληλη αλλαγή συστήματος συντεταγμένων να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας που παριστάνει. (1.2μ)

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**