

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9
ΑΘΗΝΑ 157 80
Τηλ: 210 772-3032, Fax: 210 772-3025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY
DEPARTMENT OF PHYSICS
ZOGRAFOU CAMPUS
157 80 ATHENS - GREECE
Phone : +30 210 772-3032, Fax: +30 210 772-3025
html://www.physics.ntua.gr

Φυσική IV (Κβαντομηχανική-I), ΣΕΜΦΕ 4^ο Εξ., Ακ. Έτος 2016-2017

Επαναληπτική εξέταση

Διδάσκων: Γ. Ζουπάνος

Συνεργάτης: Γ. Πατέλλης

Τετάρτη 27.09.2017 12:00, Διάρκεια 2.5 ώρες

Θέμα 1. Απαντήστε σε ένα εκ των A) και B):

- A) Σε ένα πείραμα Compton τα προσπίπτοντα φωτόνια έχουν ενέργεια $E = 2mc^2$ και η ακτινοβολία που σκεδάζεται παρατηρείται σε κατεύθυνση κάθετη προς τη διεύθυνση πρόσπιτωσης.
- α) Υπολογίστε το μήκος κύματος, την ορμή και την ενέργεια των σκεδαζόμενων φωτονίων.
β) Υπολογίστε την κινητική ενέργεια των ανακρουόμενων ηλεκτρονίων.
- B) 1977 στο Fermilab ανακαλύφθηκε ότι το στοιχειώδες σωματίδιο b , μάζας $m_b = 4.2 GeV$, και το αντισωματίδιο του \bar{b} μπορούν να σχηματίσουν μια δέσμια κατάσταση που ονομάστηκε μεσόνιο Y . Λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις μη - διαταρακτικές επιδράσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής (QCD) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια b, \bar{b} κινούνται σε ένα στατικό δυναμικό

$$V(r) = Br$$

όπου B θετική σταθερά.

- α) Εφαρμόστε τη συνθήκη κβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις ενεργειακές στάθμες του συστήματος.
β) Υπολογίστε τη συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται όταν το σύστημα μεταπίπτει από την πρώτη διεγερμένη στη θεμελιώδη του κατάσταση.

Υπόδειξη: Το σύστημα των σωματιδίων b και \bar{b} ίδιας μάζας ($m_b = m_{\bar{b}}$) που περιστρέφονται γύρω από το κέντρο βάρους τους είναι ισοδύναμο με το σύστημα κατά το οποίο ένα σώμα με ανηγμένη μάζα

$$M = \frac{m_b m_{\bar{b}}}{m_b + m_{\bar{b}}} = \frac{m_b^2}{2m_b} = \frac{m_b}{2}$$

περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο.

Θέμα 2. Σωματίδιο με μάζα m είναι περιορισμένο σ' ένα μονοδιάστατο κουτί με αδιαπέρατα τοιχώματα, δηλαδή σε δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } 0 < x < a, \\ +\infty & \text{για } x < 0 \text{ ή } x > a \end{cases}$$

Αν $\psi_n(x)$ είναι οι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις για τις στάσιμες καταστάσεις ($n = 1, 2, 3, \dots$) θεωρήστε την κατάσταση που αντιστοιχεί στον εξής συνδυασμό

$$\psi(x) = A\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)$$

α) Βρείτε τον συντελεστή κανονικοποίησης A

β) Γράψτε την χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$

γ) Βρείτε για την κατάσταση $\psi(x,t)$ την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο διάστημα $(0,a/2)$ ως συνάρτηση του χρόνου t .

$$\text{Υπενθυμίσεις: } \int \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{a}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \quad \int \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{a}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{a}\right),$$

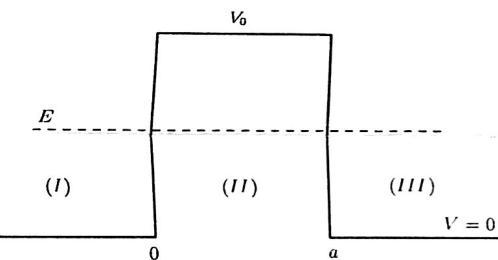
$$\int \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx = \frac{2a \sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{3\pi}$$

Θέμα 3. Δέσμη σωματιδίων μάζας m προσπίπτει από αριστερά σε δυναμικό της μορφής

$E < V_0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \\ 0 & , \quad x > a \end{cases}$$

με ενέργεια $E = \frac{V_0}{2}$.



$$\text{Υπενθύμιση: } J = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right)$$

α) Να βρείτε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης παντού στο χώρο.

β) Να υπολογίσετε το ρεύμα πιθανότητας της προσπίπουσας δέσμης στην περιοχή (I), $J_{\text{πρ}}^{(I)}$, καθώς ρεύμα πιθανότητας της διερχόμενης δέσμης στην περιοχή (III), $J_{\delta}^{(III)}$

γ) Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες δείξτε ότι ο συντελεστής διέλευσης έχει τη μορφή

$$T = \frac{4e^{2a\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}}}{(e^{2a\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}} + 1)^2}$$

Θέμα 4. Η κατάσταση ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m και γωνιακής συχνότητας ω τη χρονική στιγμή $t = 0$ περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\psi = \frac{1-i}{\sqrt{3}}\psi_0 + \frac{N}{\sqrt{3}}\psi_1$$

όπου ψ_0 και ψ_1 ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

α) Αφού υπολογίσετε τη σταθερά κανονικοποίησης N , να βρείτε τα δυνατά αποτελέσματα της ενέργειας και την πιθανότητα εμφάνισής τους.

β) Να βρεθεί η μέση τιμή της ενέργειας και η πιθανότητα να μετρήσουμε τη μέση τιμή.

γ) Αφού υπολογίσετε το μεταθέτη $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger]$ αποδείξτε τη σχέση

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger \psi_n) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger \psi_n)$$

$$\text{Υπενθυμίσεις: } \hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1, \quad \hat{H} \psi_n = E_n \psi_n$$

Η εξέταση πραγματοποιείται με ανοικτά βιβλία αλλά ΟΧΙ προσωπικές σημειώσεις.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Καλή επιτυχία.