



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
 Τομέας Μαθηματικών
 Πολυτεχνειούπολη - Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80

Επαν. Εξέταση ΣΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

30 Αυγούστου 2017

ZHTHMA ΠΡΩΤΟ: α) Να διατυπωθεί και αποδειχθεί το Θεώρημα που συνδέει τη γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων $f_1(v), f_2(v), v \in I$, I ανοιχτό διάστημα, μιας 2nd τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με την ορίζουσα Wronski.
 (μον. 1.25).

✓ β) Να δοθεί η μορφή της γενικής λύσης της εξίσωσης
 $y''' - 2y'' + y' - 2y = t + \sin t$ (μον. 0.75)

✓ γ) Αν f_1, f_2 είναι δυο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ όπου $p(x), q(x), r(x)$ συνεχείς, $p(x) > 0$ να δοθεί μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης η οποία να δέχεται ως λύση την $\begin{vmatrix} f_1 & f_1 \\ f_2 & f_2 \end{vmatrix}$ (μον. 0.5)

ZHTHMA ΔΕΥΤΕΡΟ: α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση Legendre $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$. Αν $P_3(t), P_4(t)$ είναι οι πολυωνυμικές λύσεις της εξίσωσης για $\alpha = 3, 4$ αντιστοίχως να διατυπωθεί και αποδειχθεί η σχέση ορθογωνιότητας που συνδέει τα δύο αυτά πολύωνυμα Legendre.
 (μον. 0.5)
 β) Να χαρακτηριστούν τα ιδιάζοντα σημεία και για τα κανονικά να καθοριστεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και η ακτίνα σύγκλισης της λύσης σε δυναμοσειρά της εξίσωσης $(x+2)^2(x^2+1)^2(x+l)y''' + (x^2+1)y' + 3y = 0$ (μον. 0.75)

γ) Να λυθεί με χρήση ολ. μετασχηματισμού η εξίσωση $y'' + 2y' + y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq t < \infty \end{cases}, y(0) = 0, y'(0) = 0$ (μον. 1.25)

ZHTHMA ΤΡΙΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $3x^2y + 2xy + xy^3 + (x^2 + y^2)y' = 0$. (μον. 1)

✓ β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}, x > 0$. (μον. 1)

γ) Δίνεται το ΠΑΤ $y' = \frac{1+t^2}{t-y}$. Να προσδιοριστούν όλες οι περιοχές του $t y$ επιπέδου στις οποίες ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας. Να δοθεί η μορφή του αναγωγικού σχήματος του Picard που δίνει τη λύση για $y(1) = 0$ (χωρίς να γίνουν υπολογισμοί). (μον. 0.5)

ZHTHMA ΤΕΤΑΡΤΟ:

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων να βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος $x' = A \cdot x$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί το είδος και η ευστάθεια του κρίσμου σημείου $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (μον. 2.5)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}, L(\sin at) = \frac{a}{s^2 + a^2}, L(e^{at}f(t)) = F(s-a), L(u_a(t)f(t-a)) = e^{-sa}F(s),$$

$$\text{αν } F(s) = L(f(t)) \text{ και } u_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & t \geq a, \end{cases}, a \geq 0.$$

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες, Καλή επιτυχία