

Θεωρία Γραφημάτων

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστήμων

Τομέας Μαθηματικών

Αντώνιος Συμβόλης

Θεωρία Γραφημάτων

8 Σεπτεμβρίου 2017

- Διάρκεια: 2 ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^ο

Ορίζουμε ως **γέφυρα** ενός συνεκτικού απλού γραφήματος G μια ακμή $e \in E(G)$ για την οποία ισχεί ότι το $G - e$ δεν είναι συνεκτικό. Δείξτε ότι ένα απλό κανονικό συνεκτικό διμερές γράφημα με βαθμό τουλάχιστον 2, δεν περιέχει γέφυρα.

Θέμα 2^ο

Έστω απλό k -συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $\delta(G)$.

- Δείξτε ότι αν $\delta(G) \geq n - 2$ τότε $k = \delta(G)$.
- Για κάθε $n \geq 4$ βρείτε απλό γράφημα G με $\delta(G) = n - 3$ και $k < \delta(G)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 3^ο

Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα. Ένας 2-παράγοντας είναι ένα παραγόμενο υπογράφημα που αποτελείται από ξένους μεταξύ τους κύκλους. Έστω G ένα 4-κανονικό απλό γράφημα. Να δειχθεί ότι το σύνολο των ακμών του G αναλύεται σε δύο ξένους μεταξύ τους 2-παράγοντες, δηλαδή υπάρχουν δύο 2-παράγοντες F_1 και F_2 του G για τους οποίους $E(F_1) \cap E(F_2) = \emptyset$ και $E(F_1) \cup E(F_2) = E(G)$.

Θέμα 4^ο

Έστω C_n ο κύκλος με $n \geq 3$ κορυφές. Συμβολίζουμε με $\overline{C_n}$ το συμπλήρωμα του C_n , και με C_n^2 το γράφημα που προκύπτει από τον κύκλο C_n , εάν ενώσουμε με ακμή όλα τα ζεύγη κορυφών (x, y) που έχουν απόσταση $dist(x, y) = 2$.

- Εξετάστε για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το γράφημα $\overline{C_n}$ είναι επίπεδο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
- Εξετάστε για ποιες τιμές του $n \geq 3$ το γράφημα C_n^2 είναι επίπεδο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.