

Θεωρία Γραφημάτων

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Τομέας ΜαθηματικώνΘεωρία Γραφημάτων  
21 Ιουνίου 2017

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

## Θέμα 1°

Ένα σύνολο ανεξάρτητων κορυφών είναι ένα σύνολο από κορυφές του γραφήματος οι οποίες δεν ενώνονται μεταξύ τους με καμία ακμή. Συμβολίζουμε με  $\beta_0(G)$  το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων κορυφών του γραφήματος  $G$ . Δείξτε ότι αν το  $G$  είναι απλό γράφημα και δεν περιέχει τρίγωνο τότε  $\Delta(G) \leq \beta_0(G)$  και  $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|\beta_0(G)}{2}$ .

## Θέμα 2°

Έστω  $d \geq 2$ . Εξετάστε αν για κάθε απλό συνεκτικό  $d$  – κανονικό γράφημα  $G$ , κάθε κορυφή είναι κεντρική και απόκεντρη. Αν ισχύει αποδείξτε το, αλλιώς δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

## Θέμα 3°

Έστω απλό γράφημα  $G = (V, E)$  με  $n$  κορυφές και ακολουθία βαθμών  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ . Εξετάστε πότε το γράφημα  $G^{(k)} = \underbrace{G * \dots * G}_{k \text{ φορές}}$ ,  $k \geq 2$ , είναι Eulerian και πότε Hamiltonian, όπου  $*$  συμβολίζει τη σύνδεση γραφημάτων.

## Θέμα 4°

Εξετάστε εάν υπάρχει απλό συνεκτικό διμερές επίπεδο γράφημα  $G$  με ελάχιστο βαθμό κορυφής  $\delta(G) \geq 4$ .

## Θέμα 5°

Δείξτε ότι  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  είναι η ακολουθία βαθμών ενός δέντρου αν και μόνο αν  $d_n \geq 1$  και  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ .