

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο - Επαναληπτική Εξέταση Σεπτέμβριος 2015
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. A) i) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T : V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι ο T είναι ισομετρικός αν και μόνο αν απεικονίζει μια ορθοκανική βάση σε ορθοκανονική. (1,25μ)

ii) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y - z, x - y, x + z).$$

Να βρείτε τον συζυγή T^* του T δικαιολογώντας πλήρως τη διαδιασία. (1,25μ)

B) Δίνεται ο υπόχωρος M του \mathbb{R}^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 2, 0, 3), \quad u_2 = (4, 0, 5, 8), \quad u_3 = (8, 1, 5, 6).$$

Να βρείτε μια ορθοκανική βάση του M καθώς και το ορθογώνιο συμπλήρωμα M^\perp . (1.5μ)

Θ2. i) Έστω δύο $n \times n$ πίνακες A και B , οι οποίοι είναι όμοιοι μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες και τις ίδιες γεωμετρικές πολλαπλότητες, αντίστοιχα. (0.9μ)

ii) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 7 - 2\alpha & -2 & 4 - 2\alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha - 3 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας και για ποιες όχι. (1.3μ)

iii) Για τις τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A του ii) δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. (1.3μ)

Θ 3. Με τη χρήση κατάλληλων μετασηματισμών, να αναχθεί η εξίσωση

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x + 8y - 3 = 0$$

στην κανονική της μορφή και να βρεθεί το είδος της καμπύλης που παριστάνει. (2.5μ)

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ