

**Θεωρία Γραφημάτων**

13 Ιουνίου 2018

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Ένα τουρνουά (tournament) είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$  τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών  $u, v \in V$ , ακριβώς μία από τις ακμές  $(u, v)$ ,  $(v, u)$  ανήκει στο  $E$ . Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με  $n$  κορυφές υπάρχει μια κορυφή-βασιλιάς, δηλαδή μια κορυφή  $u$  από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Έστω απλά συνεκτικά γραφήματα  $G$  και  $H$ . Με  $G \times H$  συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο των  $G$  και  $H$ .

- Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το γράφημα  $G \times H$  να είναι διμερές.
- Εξετάστε για ποιες τιμές του  $n \geq 3$  το γράφημα  $C_n \times P_n$  είναι επίπεδο. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Έστω απλό γράφημα  $G$ . Συμβολίζουμε με  $\bar{G}$  το συμπληρωματικό γράφημα του  $G$ .

- Έστω  $T$  ένα δένδρο με  $n$  κορυφές. Να δειχθεί ότι το  $T$  είναι υπογράφημα του  $\bar{C}_{n+2}$ .
- Για ποιες τιμές του  $n \geq 3$  το  $C_n$  είναι επίπεδο? Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

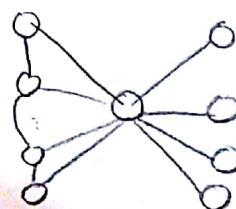
On the  $\bar{C}_n$  graph  $\delta(G) \leq 5 \rightarrow$  επίπεδα  $m \leq 3n - 6$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Έστω συνεκτικό γράφημα  $G$  και σκελετικό δένδρο  $T$  του  $G$ . Με  $\ell(T)$  συμβολίζουμε το πλήθος των φύλλων του  $T$  (δηλαδή των κορυφών βαθμού 1). Δείξτε ότι για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων  $r$  και  $t$  με  $2 \leq r \leq t$

$$\min\{\ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G\} = r \text{ και}$$

$$\max\{\ell(T) : T \text{ σκελετικό δένδρο του } G\} = t.$$

**Θέμα 5<sup>ο</sup>**

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα  $G$ . Με  $\chi'(G)$  συμβολίζουμε το χρωματικό δείκτη του  $G$ . Εξετάστε εάν τα παρακάτω ισχύουν.

- Αν το  $G$  είναι 3-κανονικό και έχει γέφυρα τότε  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ .
- Αν το  $G$  είναι 4-κανονικό τότε  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

Αιτιολογήστε την απάντησή σας ή δώστε αντιπαράδειγμα.