

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

5ο ΕΞΑΜΗΝΟ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018, ΩΡΑ 15.00 - 18.00

Θέμα (Θ-1) (Θεώρημα Picard) Έστω D ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{n+1} . Έστω $(t_0, x^0) \in D$ και $a > 0, b > 0$, τέτοια ώστε το σύνολο $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x^0| \leq b\} \subset D$. Επίσης έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο D , που ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x στο D . Τότε για την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_{m+1}(t) := x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x_m(s)) ds$, $x_0(t) = x^0$ (Επαναλήψεις Picard) να αποδειχθούν: (i) Για κάθε t η $x_m(t)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο $[t_0, t_0 + A]$ και αν $t \in [t_0, t_0 + A]$, τότε $|x_m(t) - x_0| \leq M|t - t_0|$, όπου $M := \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in D\}$ και $A := \min\{a, \frac{b}{M}\}$, και (ii) η ακολουθία $\{x_m(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[t_0, t_0 + A]$ σε μια συνεχή συνάρτηση $x(t)$.

Θέμα (Θ-2) (Θεώρημα Ευστάθειας) Έστω το σύστημα $x' = F(x)$, όπου $F(0) = 0$ και $x = x(t), t \geq 0$. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει μία συνάρτηση $V(x)$ θετικά ορισμένη και συνεχώς διαφορίσιμη σε μία γειτονιά του $x(t) \equiv 0, t \geq 0$. Τότε: (i) αν η $V(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ευσταθής, και (ii) αν η $V(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, η λύση $x(t) \equiv 0$, για κάθε $t \geq 0$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Θέμα (Θ-3) Έστω το δυναμικό σύστημα $x^+ = f(x)$, όπου $f: D \mapsto \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα $D \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in D$ και $f(0) = 0 \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $0 \in D$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αν $|f'(0)| < 1$.

*** Να γραφούν τα ΔΥΟ (2) από τα θέματα (Θ-1)-(Θ-3) ***

Θέμα (Π-1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις για τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις σε μία περιοχή του $x = 0$. Στη συνέχεια να εξεταστεί αν είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για το μονοσήμαντο των λύσεων των αντιστοιχών προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$(i) y'(x) = (x - y(x))^{\frac{2}{3}}, \quad y(5) = 5 \quad \text{και} \quad (ii) y'(x) = (x - y(x))^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Θέμα (Π-2) (i) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία του συστήματος $x' = 5x - 12y + 17, \quad y' = x - 2y + 3$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί ο τύπος και το είδος της ευστάθειας αυτών και να σχεδιαστεί ποιοτικά το αντίστοιχο επίπεδο φάσεων. (ii) Έστω το σύστημα $x' = y^2 - 1, \quad y' = x^3 - y$. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να μελετηθεί η ευστάθεια αυτών.

Θέμα (Π-3) Να βρεθούν τα σημεία διακλάδωσης, να περιγραφούν οι τροχιακές δομές για τα διάφορα πεδία μεταβολής της παραμέτρου λ και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης της διαφορικής εξισωσης: $x' = \lambda^2 - 4\lambda x + 2x^2$.

Θέμα (Π-4) Έστω το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + x - c^2, \quad x \in \mathbb{R}$, όπου $c > 0$ σταθερή παράμετρος. (i) Να εξετασθούν οι ιδιότητες ευστάθειας των σημείων ισορροπίας. (ii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $c > 0$, το δυναμικό σύστημα $x^+ = 2x^2 + x - c^2, \quad x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο 2;

Θέμα (Π-5) Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Κάνοντας χρήση πολικών συντεταγμένων να βρεθεί το ω -οριακό σύνολο για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη.

Θέμα (Π-6) Έστω το δυναμικό σύστημα $\dot{x}_1 = 2x_1 - 5x_2 - x_1(x_1^2 + 2x_2^2)^2, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 - 3x_2(2x_1^2 + x_2^2)^2, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. (i) Κάνοντας χρήση της συνάρτησης $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, να δείξετε ότι για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών είναι φραγμένη. (ii) Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Poincare-Bendixson, να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει τουλάχιστον μία περιοδική λύση, η οποία βρίσκεται στο σύνολο $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq \sqrt{2}\}$.

*** Να γραφούν ΤΕΣΣΕΡΑ (4) από τα θέματα (Π-1)-(Π-6) ***

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ - ΣΥΝΟΛΟ ΜΟΝΑΔΩΝ: 9

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3:00 ΩΡΕΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

Eufis -> Αλιά Σε αντίστηση, οταν -

$\sqrt{x} > k \rightarrow Wf < 0$ η οποία θα είναι