

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ  
Σεπτέμβριος 2017

**Θέμα 1.** (a) Για την καμπύλη  $r(t) = (2 \cos t, \sqrt{3}t + \sin t, \sqrt{3} \sin t - t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  να βρείτε:

- την καμπυλότητα  $\kappa(t)$ , τη στρέψη  $\tau(t)$ , και το τριεδρό Frenet  $T(t), N(t), B(t)$  (1,5μ)

- αναπαραμέτρηση με φυσική παράμετρο  $s$ . (0,5 μ)

(β) Υπάρχει ομαλή, απλή, κλειστή καμπύλη μήκους  $5\mu$  και εμβαδού  $2\mu^2$ ? (0,5μ)

**Θέμα 2.** Έστω η κωνική επιφάνεια

$$S : r(t; \theta) = (2t \cos \theta, 2t \sin \theta, 2t) \quad t > 0, \theta \in [0, 2\pi).$$

- (a) Προσδιορίστε το σημείο τομής και τη γωνία τομής των παραμετρικών καμπύλων  $\theta = \frac{\pi}{4}$  και  $t = 2$  της επιφάνειας. Να σχεδιάσετε την επιφάνεια και τις καμπύλες  $\theta = \frac{\pi}{4}, t = 2$ . (1,5μ)  
 (β) Προσδιορίστε το είδος των σημείων της επιφάνειας (ελλειπικό, υπερβολικό, παραβολικό, επίπεδο). (1μ)

**Θέμα 3.** Έστω η επιφάνεια  $S : r(u, v) = (u + v, uv, u^2v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , και η καμπύλη  $(c) : \phi(s) = r(u(s), v(s))$ ,  $s \in I$  της  $S$ , όπου  $s$  φυσική παράμετρος της  $(c)$ .

(a) Δώστε τον ορισμό του διανύσματος κάθετης καμπυλότητας και του διανύσματος γεωδαισιακής καμπυλότητας της  $(c)$  στο τυχαίο σημείο της,  $\phi(s)$ . Πότε η καμπύλη  $C$  ονομάζεται γεωδαισιακή: (1μ)

(β) Αν  $\phi(0) = (2, 1, 1)$  και  $\dot{\phi}(0) = (3, 3, 4)$ , και η καμπύλη  $(c)$  είναι γεωδαισιακή της  $S$ , να προσδιορίστε για την καμπύλη  $(c)$  στο σημείο  $\phi(0)$ : τη διεύθυνση, την κάθετη καμπυλότητα και το διάνυσμα καμπυλότητας  $\ddot{\phi}(0)$ .

**Θέμα 4.** Έστω το ημιεπίπεδο  $\Phi_1 = \{(x, y, 0) | x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ , και  $\Phi_2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}s \cos t, \frac{1}{2}s \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}s \right) | s \in \mathbb{R}^*, t \in \mathbb{R} \right\}$  το ένα χωνί (μείον την κορυφή) του ορθού κυκλικού κώνου γωνίας  $30^\circ$  με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα των  $z'z$ .

(a) Ελέγχετε αν η επόμενη απεικόνιση αποτελεί τοπική ισομετρία μεταξύ των δύο επιφανειών:

$$f : \Phi_1 \rightarrow \Phi_2, (x, y, 0) \mapsto \left( \frac{1}{2}x \cos y, \frac{1}{2}x \sin y, \frac{\sqrt{3}}{2}x \right). \quad (1,5\mu)$$

(β) Υπάρχει τοπική ισομετρία μεταξύ των  $\Phi_1, \Phi_2$ ? (1μ)