

**Εξέταση στα «Μαθηματική Προτυποποίηση»,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**

Θέμα 1^ο: (α) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό $J(y) = \int_0^1 (y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + 2\dot{y}^2(t)) dt$ με περιορισμούς $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. (β) Να ελαχιστοποιήσετε το συναρτησιακό $J(y) = \int_0^1 (y^2(t) - y(t)\dot{y}(t) + 2\dot{y}^2(t)) dt$ με περιορισμούς $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ και $\int_0^1 y(t) dt = 1$.

Θέμα 2^ο: (α) Ασυμπίεστο νευτώνικό ρευστό ρέει στην περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Να δώσετε τις εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο. (β) Κάνοντας την αντικατάσταση $u(t, x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(t, x, y)$ και $v(t, x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x, y)$ για κάθε $t \geq 0$, $(x, y) \in D$, να δείξετε ότι η λεία συνάρτηση $\psi : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta \Psi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(\Delta \Psi) = \nu \Delta^2 \Psi$, όπου $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ο τελεστής Laplace και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. (γ) Να δείξετε ότι η πίεση του ρευστού ικανοποιεί την εξίσωση Poisson $\Delta P = -\rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + (u+v) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$, όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού.

Θέμα 3^ο: Έστω η διαφορική εξίσωση $\ddot{y}(t) + (1 + \varepsilon^3)y(t) + \varepsilon y^5(t) = 0$, όπου $\varepsilon > 0$ είναι μία σταθερά με $\varepsilon \ll 1$. (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(t) = \frac{1}{2}\dot{y}^2(t) + \frac{1+\varepsilon^3}{2}y^2(t) + \frac{\varepsilon}{6}y^6(t)$ είναι σταθερή (αναλλοίωτη). (β) Να δώσετε τη προσέγγιση 1^{ης} τάξεως της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$ με τη μέθοδο Poincare-Lindstedt (χρησιμοποιήστε τον τύπο $\cos^5(x) = \frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$).

Θέμα 4^ο: Έστω ότι η θερμοκρασία $T(t, z)$ σε μία ράβδο μήκους $L = 1m$ υπακούει στην εξίσωση της θερμότητας $\frac{\partial T}{\partial t}(t, z) = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t, z)$ για $t > 0, z \in (0, 1)$, όπου t ο χρόνος, $z \in [0, 1]$ η χωρική συντεταγμένη και $a > 0$ σταθερά. Αν στα άκρα της ράβδου η θερμοκρασία είναι σταθερή και ίση με 0, και αν $T(0, z) = T_0(z)$ για $z \in [0, 1]$, όπου $T_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, να δείξετε ότι: (α) $\frac{d}{dt} \int_0^1 T^2(t, z) dz = -2a \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial z}(t, z) \right)^2 dz$ για $t > 0$, (β) $\int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial z}(t, z) \right)^2 dz \geq 2 \int_0^1 T^2(t, z) dz$ για κάθε $t > 0$ (χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz), (γ) $\int_0^1 T^2(t, z) dz \leq \exp(-4at) \int_0^1 T_0^2(z) dz$ για $t \geq 0$.

Καλή επιτυχία!