

Θέμα 1(MON 2) Διερεύνηση του προβλήματος

$$\int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + x_1) dt \rightarrow \min \quad \text{με } x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, \int_0^1 x_2 dt = 3$$

Θέμα 2. Πρόβλημα Ρυθμιστή:

$$\dot{x} = Ax + Bu, J(u) = x'(T)Fx(T) + \int_0^T (x'(s)Qx(s) + u'(s)Ru(s))ds \rightarrow \min$$

Θ2(A) Χρησιμοποιώντας την αρχη του μεγίστου να εξάγετε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επίλυση του ανωτέρου προβλήματος ($F \geq 0, Q \geq 0, R > 0$) **(MON 3)**

✗Θ2(B) Δείξτε ότι ο έλεγχος $u = -R^{-1}B'P(t)x(t)$ είναι ειναι άριστος και η αντίστοιχη τιμή του αριστου κοστους ισούται με $x'_0 P(0)x_0$, οπου x_0 η αρχικη κατασταση και P ο πινακας- λυση της Δ.Ε. Riccati:

$$\dot{P} = -PA - A'P + PBR^{-1}B'P - Q, P(T) = F$$

(MON 3)

Θέμα 3 (MON 2) Με χρήση της Riccati επιλύστε το πρόβλημα του ρυθμιστή

$$\dot{x} = 2x + u, J(u) = 100x^2(1) + \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t))dt \rightarrow \min, x_0 \in \mathbb{R} \text{ δοθέν}$$

και υπολογίστε την τιμή του αρίστου κόστους.

✗ Θέμα 4 (MON 2). Διερεύνηση του προβλήματος

$$\dot{x}_1 = ux_2, \dot{x}_2 = u, J(u) = f_1x_1^2(1) + f_2x_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \rightarrow \min, f_1, f_2 \in \mathbb{R}$$

$(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2$, δοθεντα, $u(\cdot)$ χωρίς περιορισμούς. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο υποψήφιος άριστος έλεγχος είναι σταθερός στο διάστημα $[0, 1]$).

✗ Θέμα 5 (MON 2). Επίλυση του προβλήματος

$$\dot{x} = u, x \in \mathbb{R}, -1 \leq u \leq 1, J(u) = \frac{1}{50}x^2(1) + \int_0^T (x(t) + u^2(t))dt \rightarrow \min, x(0), T \text{ δοθέντα}$$

✗ Θέμα 6 (MON 2) Μελέτη του προβλήματος αρίστου χρόνου για το σύστημα $\dot{x}_1 = -x_1 + u, \dot{x}_2 = -2x_2 + 2u, |u(\cdot)| \leq 1$.

Θέμα 7 (MON 3) Για το ελέγχιμο σύστημα $\dot{x} = Ax + ub, |u(\cdot)| \leq 1$ δείξτε ότι καθε ακρότατος έλεγχος ικανοποεί την αρχή του μεγίστου.

Laplace: $t^n \exp(-at) / n! \rightarrow 1/(s+a)^{n+1}$
 $\sin kt \rightarrow k / (k^2 + s^2), \cos kt \rightarrow s / (k^2 + s^2)$