

ΣΕΜΦΕ - 6^ο ΕΞΑΜΗΝΟ - 9/2017
ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ "ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ"

~~A)~~ Εστω $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, με S κυρτό και $\bar{x} \in S$. Υποθέτουμε ότι η παράγωγος θετικά κατά κατεύθυνση $\delta_+ f(\bar{x}, x - \bar{x})$ υπάρχει για κάθε $x \in S$.

Να δειχθεί ότι αν το \bar{x} είναι σημείο τοπικού (ή ολικού) ελαχίστου της f στο S , τότε ισχύει η αναγκαία συνθήκη

~~A)~~ $\delta_+ f(\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0$ για κάθε $x \in S$.

~~B)~~ Να δειχθεί ότι, αν επιπλέον η f είναι κυρτή στο S , τότε η (1) είναι και ικανή.

~~C)~~ Πώς γράφεται η συνθήκη (1) αν η f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη;

2. Δίνεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης:

Να βρεθεί $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ που να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = 2x^3 - 2y^3$$

κάτω από τους περιορισμούς $(x, y, z) \in S$, όπου

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Να δειχθεί ότι το πρόβλημα αυτό έχει λύση. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας το θεώρημα πολλαπλασια-στών Kuhn-Tucker-Lagrange. Είναι η λύση μοναδική?

3. ~~A)~~ Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = 3x + 3y$ και το σύνολο περιορισμών $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$. Να εκτελεστεί ένα βήμα του αλγόριθμου των προβεβλημένων κλίσεων με αρχικό διάνυσμα το $[1/2, 1/2]^T$.

~~B)~~ Να δείξετε ότι ο αλγόριθμος είναι καλά ορισμένος και να αποδείξετε ότι το y_k είναι η προβολή του διανύσματος $x_k - \frac{1}{\gamma} \nabla f(x_k)$ στο σύνολο των περιορισμών. $\|y - x\|_\infty$

Αλγόριθμος των προβεβλημένων κλίσεων (με βέλτιστο βήμα):

1) Θέτουμε $\kappa=0$, και επιλέγουμε $x_0 \in U$.

2) Βρίσκουμε κατεύθυνση ώστε y_k

$$\zeta_k := \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k) + \frac{\gamma}{2} \|y_k - x_k\|_2^2 = \min_{y \in U} (\nabla f(x_k)^T (y - x_k) + \frac{\gamma}{2} \|y - x_k\|_2^2)$$

3) Θέτουμε $\delta_k = \nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)$. Αν $\delta_k = 0$ σταματάμε. Διαφορετικά,

4) Βρίσκουμε βήμα α_k ώστε

$$f(x_k + \alpha_k (y_k - x_k)) - f(x_k) = \min_{\alpha \in [0, 1]} (f(x_k + \alpha (y_k - x_k)) - f(x_k))$$

$$5) \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k (y_k - x_k)$$

4. ~~A)~~ Εστω τετραγωνική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$, με A συμμετρικό

πίνακα. Αν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος να δείξετε ότι η f είναι αυστηρά κυρτή.

~~B)~~ Να δείξετε επίσης ότι είναι πιεστική.

~~C)~~ Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις της μεθόδου των κλίσεων με βέλτιστο βήμα για τον υπολογισμό ακροτάτου της τετραγωνικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1/2)x^T A x - b^T x$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = [1, 1]^T, \quad x_0 = [1/2, 0]^T.$$

$$\alpha_k = \frac{\nabla f(x_k)^T (y_k - x_k)}{\nabla f(x_k)^T A (y_k - x_k)}$$

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες. Τα θέματα είναι ισόβαθμα. Καλή επιτυχία!